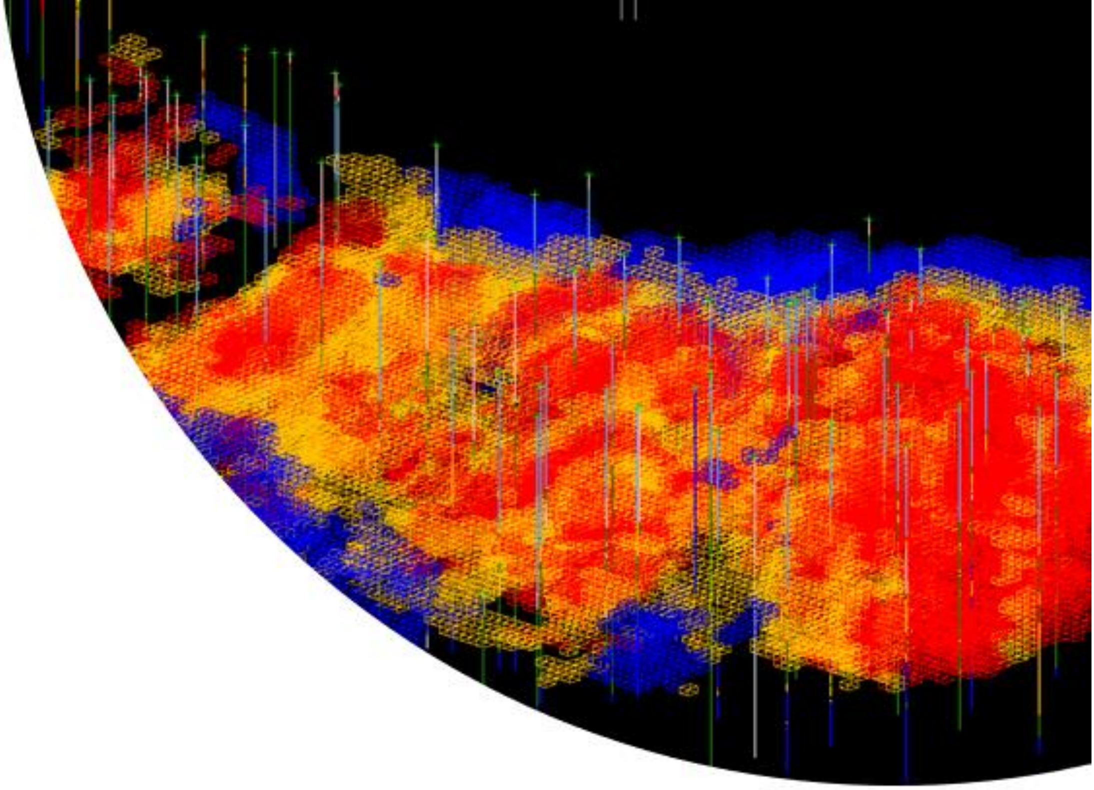
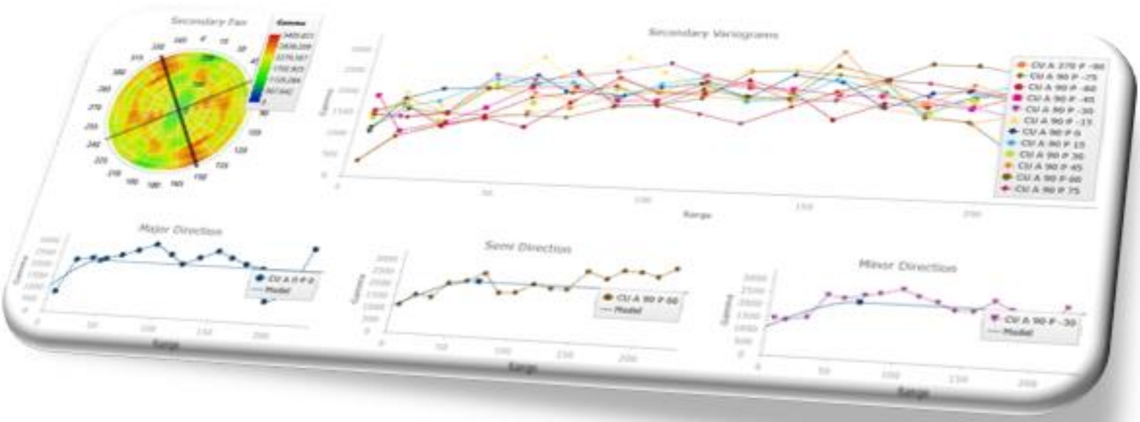


Εφαρμοσμένη Γεωστατιστική

Ιωάννης Κ. Καπαγερίδης
PhD CEng CSci MIMMM



Εφαρμοσμένη Γεωστατιστική

Ιωάννης Κ. Καπαγερίδης
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων

Κοζάνη 2022

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

για τη Βίκυ και τον Κυριάκο

Πρόλογος

Η γεωστατιστική μεθοδολογία έχει καθιερωθεί τις τελευταίες δεκαετίες ως η μόνη επίσημα αποδεκτή τεχνική διεθνώς για την εκτίμηση μεταλλευτικών αποθεμάτων καθώς και για την αντιμετώπιση ενός μεγάλου εύρους προβλημάτων παρεμβολής και εκτίμησης. Γνώρισε και γνωρίζει συνεχή ανάπτυξη και αποτελεί αντικείμενο έρευνας παγκοσμίως. Παρόλα αυτά, στον Ελληνικό χώρο εφαρμόζεται από ορισμένες μόνο μεταλλευτικές επιχειρήσεις και όπου αυτό συμβαίνει είναι αμφίβολο κατά πόσο ακολουθείται η μεθοδολογία ορθολογικά και με πλήρη κατανόηση των παραδοχών καθώς και των συνεπειών από τις διάφορες επιλογές που γίνονται στα διάφορα στάδια εφαρμογής.

Στο βιβλίο αυτό καλύπτεται η βασική θεωρία της γεωστατιστικής μεθοδολογίας, όπως αυτή εφαρμόζεται σε μεταλλευτικά προβλήματα. Απευθύνεται σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές που διδάσκονται Γεωστατιστική, Εκτίμηση Αποθεμάτων και Αξιολόγηση Κοιτασμάτων. Η ανάγνωση και κατανόηση του βιβλίου απαιτεί κάποια στοιχειώδη μαθηματικά καθώς και γνώση της μεταλλευτικής και γεωλογικής ορολογίας. Είναι γενικά λανθασμένη η άποψη ότι η γεωστατιστική απαιτεί την απομνημόνευση και κατανόηση ατελείωτων και δυσνόητων εξισώσεων. Παρόλα αυτά, είναι ιδιαίτερα επικίνδυνο να υπολογίζει κανείς μεταλλευτικά αποθέματα με οποιαδήποτε μέθοδο χωρίς να κατανοεί τις υποκείμενες παραδοχές και τη λειτουργία της.

Στο τέλος του βιβλίου δίνεται μια εκτενής βιβλιογραφία καθώς και ένας μικρός κατάλογος των κυριοτέρων ξενόγλωσσων συγγραμμάτων γεωστατιστικής. Δίνεται επίσης, σε Ελληνική μετάφραση, ο Κώδικας Αναφοράς Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων ο οποίος ισχύει στον Ευρωπαϊκό χώρο ως οδηγός προς τους επαγγελματίες όλων των σχετικών κλάδων που ασχολούνται με την εκτίμηση και τον υπολογισμό αποθεμάτων.

Ιωάννης Κ. Καπαγερίδης, PhD CEng CSci MIMMM
Αναπληρωτής Καθηγητής Μεταλλευτικής Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Διδάκτωρ Μηχανικός, University of Nottingham
Chartered Engineer, Engineering Council UK
Professional Member, Institute of Materials, Minerals and Mining, UK

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ..... **II**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ..... **III**

1. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ **1**

Λήψη Αποφάσεων και Εκτίμηση Αποθεμάτων 1
Η Έλλειψη Πληθώρας Δεδομένων *2*
Ποιότητα Δειγμάτων *2*
Γεωλογία *2*
Άλλοι Παράγοντες *3*
Η Εκτίμηση στα Διάφορα Στάδια Ένος Έργου 3
Πρώτη Εκτίμηση (Αναγνώριση) *3*
Πρώτη Συστηματική Δειγματοληψία *3*
Λεπτομερής Δειγματοληψία *5*
Ανασκόπηση των Κυριότερων Τεχνικών Εκτίμησης Αποθεμάτων 13
Μέθοδοι Πολυγώνων *13*
Μέθοδοι Τομών *14*
Εκτίμηση Τμημάτων Υπόγειων Έργων *15*
Μέθοδοι Τριγώνων *15*
Μέθοδοι Αντιστρόφου Αποστάσεως (ΑΑ) *16*
Kriging *19*
Πρακτική Συστηματικής Εκτίμησης Αποθεμάτων 19
Τυποποίηση Διαδικασιών Εκτίμησης *19*
Απόδοση Ευθυνών *20*
Τεκμηρίωση Απόφασης - Προσεκτικά Βήματα *20*
Γεωλογικά Μοντέλα *21*
Ενημέρωση και Ανανέωση Μοντέλων Εκτίμησης *21*
Οι Τυφλές Προσεγγίσεις *21*
Πηγές Προβλημάτων *22*
Ερωτήσεις – Ασκήσεις 22

2. ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ **25**

Γεωστατιστική και Στατιστική 25
Στοιχεία Πιθανοτήτων 25
Χώρος *25*
Πληθυσμός *25*
Μονάδα Δειγματοληψίας *26*
Στήριξη *26*
Στοιχεία Πιθανοτήτων 26
Γεγονότα και Ομάδες *26*
Πιθανότητα *27*
Κανόνας Άθροισης και Αμοιβαία Αποκλειστικότητα *27*

Κανόνας Πολλαπλασιασμού και Ανεξαρτησία *28*
Πιθανότητα υπό Συνθήκη *28*
Τυχαιες Μεταβλητες και Κατανομες 29
Τυχαίες Μεταβλητές *29*
Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής *30*
Ιστόγραμμα *31*
Ροπες και Αναμενομενη Τιμη 32
Αναμενόμενη Τιμή *32*
Ροπές *32*
Μέσος *33*
Διακύμανση *33*
Ιδιότητες της Διακύμανσης *35*
Μέτρηση Διασποράς *35*
Άλλες Ροπές *36*
Συνδιακυμανση και Συσχετισμος 38
Γραμμικη Παλινδρομηση 39
Κοινες Κατανομες 39
Κανονική - Gaussian Κατανομή *40*
Λογαριθμική Κατανομή *40*
Ερωτησεις – Ασκησεις 42

3. ΧΩΡΟΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΒΑΡΙΟΓΡΑΜΜΑΤΑ 44

Αβεβαιοτητα και τα Κοιτασματα 44
Καθοριστικές Προσεγγίσεις *44*
Μοντέλα Πιθανοτήτων *46*
Γεωστατιστική Προσέγγιση *48*
Χωρομεταβλητες: Θεωρητικο Υποβαθρο 49
Τυχαίες Συναρτήσεις *49*
Στασιμότητα *49*
Η Απόφαση της Στασιμότητας *52*
Το Βαριογραμμα 53
Ορισμός του Βαριογράμματος *53*
Κύρια Χαρακτηριστικά του Βαριογράμματος *54*
Ερωτησεις – Ασκησεις 64

4. ΒΑΡΙΟΓΡΑΦΙΑ 66

Η Επιστημη και η 'Τεχνη' της Βαριογραφιας 66
Οι Στόχοι της Δομικής Ανάλυσης *66*
Πρακτικα Στοιχεια μιας Δομικης Αναλυσης 66
Αρχικά Βήματα *67*
Πως Υπολογιζεται ενα Βαριογραμμα 70
1Δ: Κατά Μήκος μιας Γραμμής *70*
2Δ: Στο Επίπεδο *71*
3Δ: Στο Χώρο *73*
Άσκηση: Υπολογισμος Πειραματικου Βαριογραμματος 73

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟΤΗΤΑ 75
Ένα Παράδειγμα *76*
ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΑΡΙΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ 77
Καταλληλότητα των Μοντέλων *77*
Αποδεκτοί Γραμμικοί Συνδυασμοί *78*
Από Πρακτική Άποψη *78*
ΜΕΡΙΚΑ ΚΟΙΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ 79
Σφαιρικό *79*
Μοντέλο Δύναμης *80*
Εκθετικό *81*
Gaussian *82*
Κυβικό *84*
ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΨΗΓΜΑΤΟΣ 84
Φαινομενικό και Πραγματικό Φαινόμενο Ψήγματος *85*
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ 88
ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ 89
Γεωμετρική Ανισοτροπία *89*
Ανισοτροπία Ζώνης *92*
ΓΙΑΤΙ ΌΧΙ ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ; 92
ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΒΑΡΙΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ 92
10 Βασικά Βήματα Όταν Εξετάζεται Ένα Βαριόγραμμα *93*
ΜΗ-ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΜΑ Η ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΑ ΒΑΡΙΟΓΡΑΜΜΑΤΑ 98
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΒΑΡΙΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ 98
Θεωρητικοί Λόγοι *98*
Ορισμός Στάσιμων Ζωνών *99*
Καθορισμός Κατάλληλων Παραμέτρων Υπολογισμού Βαριογράμματος *100*
Τιμές που Λείπουν *100*
Ακραίες Τιμές *100*
ΆΛΛΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΒΑΡΙΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ 102
Εναλλακτικοί Εκτιμητές Βαριογράμματος *102*
Σχετικά Βαριογράμματα *103*
Βαριογραφία Μετασχηματισμών *106*
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΒΑΡΙΟΓΡΑΦΙΑΣ 109
Δεδομένα *109*
Αναλογικό Φαινόμενο *112*
Βαριογράμματα *114*
Σχετικά Βαριογράμματα *115*
Βαριογράμματα Λογαριθμικού Μετασχηματισμού *116*
Βαριογράμματα Μετασχηματισμού Δείκτη *122*
Περίληψη Βαριογραφίας *124*
Γεωλογικοί Παράγοντες *125*
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ 125

5. ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ 'ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ' 127

ΣΤΗΡΙΞΗ 127

Η Διασπορα ως Συναρτηση της Στηριξης 127
Φαινόμενο Στήριξης 127
Παράδειγμα 128
Διακυμανσεις Διασπορας Εντος Όγκου V 132
Διακύμανση Σημείου Εντός του V 132
Διακύμανση του v εντός του V 133
Η Σχέση του Krige 133
Μεταβολη Στηριξης – Κανονικοποιηση 134
Κανονικοποίηση Βαριογράμματος 134
Συνέχεια Παραδείγματος 134
Ερωτησεις – Ασκησεις 137

6. ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ & ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ 138

Η Ιδεα της Διακυμανσης Επεκτασης 138
Διακύμανση Επέκτασης και Διακύμανση Εκτίμησης 139
Η Εξισωση της Διακυμανσης Επεκτασης 139
Παράγοντες που Επηρεάζουν τη Διακύμανση Επέκτασης 140
Άλλες Ιδιότητες 141
Διακυμανση Επεκτασης & Διακυμανση Διασπορας 141
Πρακτικα 142
Συνδυασμός Στοιχειωδών Διακυμάνσεων Επέκτασης 143
Γεωμετρία της Μεταλλοφορίας 143
Διαταξεις Δειγματοληψιας 144
Τυχαία Διάταξη 144
Τυχαίο Πλέγμα (ΤΠ) 145
Κανονικό Πλέγμα 145
Ερωτησεις – Ασκησεις 147

7. KRIGING 148

Εκτιμηση 148
Τι Θέλουμε Από Έναν Εκτιμητή 149
Γιατί Kriging; 150
BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) Βέλτιστος Γραμμικός Αμερόληπτος Εκτιμητής 150
Πως Λειτουργει το Kriging 151
Το Kriging με Απλά Λόγια 152
Εξισωσεις του Kriging 152
Όροι στις Εξισώσεις του Kriging 156
Ιδιοτητες του Kriging 159
Ακριβής Παρεμβολή 159
Μοναδική Λύση 160
Τα Συστήματα Kriging Δεν Εξαρτώνται Από τις Τιμές των Δεδομένων 160
Συνδυασμός Εκτιμήσεων Kriging 161
Επιρροή του Φαινόμενου Ψήγματος στα Βάρη του Kriging 161
Απλό Kriging 161

ΠΡΑΚΤΙΚΗ KRIGING 162
ΠΩΣ ΝΑ ΕΞΕΤΑΣΕΤΕ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ KRIGING 162
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ 163

8. ΜΟΡΦΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ KRIGING 164

ΓΕΝΙΚΑ 164
ΣΗΜΕΙΑΚΟ KRIGING 164
Μαθηματική Βάση του Σημειακού Kriging 166
Παράδειγμα Εφαρμογής Σημειακού Kriging 167
ΜΠΛΟΚ KRIGING 170
Μπλοκ Kriging με Κανονικό Kriging 171
Μπλοκ Kriging με Απλό Kriging 172
Μπλοκ Kriging με Συνολικό Kriging 173
Μπλοκ Kriging με Διαζευκτικό Kriging 173
Μαθηματική Βάση του Μπλοκ Kriging 174
COKRIGING 178
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ KRIGING 179
KRIGING ΔΕΙΚΤΗ 180
Εκτίμηση Μεταλλεύματος-Στείρων με IK 180
Ορισμός Σωμάτων Μεταλλοφορίας με IK 182
Μοντελοποίηση Βαριογράμματος με IK 182
KRIGING ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 183
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΕ KRIGING 184
Συνολική περιεκτικότητα 184
Συνολικό τονάζ 185
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ ΣΩΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΛΛΟΦΟΡΙΑΣ ΜΕ KRIGING 186
ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ-ΤΟΝΑΖ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ-ΤΟΝΑΖ 186
Καμπύλες Περιεκτικότητας-Τονάζ 186
Καμπύλες Διακύμανσης-Τονάζ 191
ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ KRIGING ΚΑΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΟΡΩΝ 193

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α – ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΗ ΜΕΛΕΤΗ 194

Βιβλία Γεωστατιστικής 194
Βιβλία Στατιστικής στις Γεωεπιστήμες 195

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β – ΚΩΔΙΚΑΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΈΡΕΥΝΑΣ, ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΟΡΥΚΤΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ 196

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 196
ΣΚΟΠΟΣ 198
ΑΡΜΟΔΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΥΠΕΥΘΥΝΟΤΗΤΑ 200
ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ 203
ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 204
ΑΝΑΦΟΡΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΥΤΙΚΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ 205
ΑΝΑΦΟΡΑ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ 206
ΑΝΑΦΟΡΑ ΟΡΥΚΤΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ 212

Αναφορα Πορων και Αποθεματων Γαιανθρακα ... 217
Αναφορα Πορων και Αποθεματων Διαμαντιων και Άλλων Πολυτιμων Λιθων ... 219
Αναφορα Βιομηχανικων Ορυκτων, Λιθων και Προσμιγματων ... 220
Αναφορα Μεταλλοφορων Υλικων Αναγομωσης Μετωπων, Δοκων, Μεταλλοφοριας Χαμηλης Περιεκτικοτητας, Αποθεσεων Μεταλλευματος, Στειρων Εξορυξης και Επεξεργασιας ... 221
Παραρτημα Β.1 – Συμπληρωματικες Κατηγοριες UNFC ... 231
Ορυκτός Πόρος Αναγνώρισης ... 231
Ορυκτός Πόρος Προ-σκοπιμότητας ... 231
Ορυκτός Πόρος Σκοπιμότητας ... 232
Παραρτημα Β.2 – Γενικοι Όροι και Αντιστοιχιες ... 232
Παραρτημα Β.3 – Κανονες Συμπεριφορας και Οδηγιες ... 234
Κοινό και Κοινωνία ... 234
Επάγγελμα, Εργοδότες και Πελάτες ... 235
Επαγγελματικά Σωματεία, Συνάδελφοι και Συνεργάτες ... 235
Περιβάλλον, Υγιεινή και Ασφάλεια ... 236

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ – ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΤΥΠΙΚΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ... 237

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ... 239

1. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Λήψη Αποφάσεων και Εκτίμηση Αποθεμάτων

Η εκτίμηση αποθεμάτων από γεωτρητικά δεδομένα είναι μια δραστηριότητα που παρουσιάζει πολλές δυσκολίες. Οι πιο κλασσικοί στατιστικοί θα θεωρούσαν τα δεδομένα από οποιαδήποτε εκτίμηση αποθεμάτων ως επικίνδυνα ανεπαρκή. Αυτό θα ίσχυε ακόμα και σε περιπτώσεις όπου ο γεωλόγος αισθανόταν ότι το κοίτασμα έχει 'υπερδιατρηθεί'.

Τα δεδομένα για την εκτίμηση αποθεμάτων είναι κατακερματισμένα από τη φύση τους. Έχουμε δείγματα που απέχουν μεταξύ τους αποστάσεις δυσανάλογες των διαστάσεων τους.

Όμως οι πληροφορίες που έχουμε αυξάνονται με το χρόνο καθώς συλλέγονται περισσότερα δείγματα και η γνώση της γεωλογίας βελτιώνεται. Κατά τη διάρκεια ενός έργου υπάρχουν γενικά πολλά στάδια, το καθένα εκ των οποίων αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό επίπεδο γνώσης της μεταλλοφορίας. Στο τέλος κάθε γεωτρητικού προγράμματος είναι δυνατές τρεις αποφάσεις:

1. **Όλα σταματούν**, εάν θεωρήσουμε πως η μεταλλοφορία δεν μπορεί να εξορυχτεί με κέρδος υπό τις παρούσες συνθήκες.
2. **Αρχίζει αμέσως η εξόρυξη**, εάν θεωρήσουμε ότι θα είναι κερδοφόρα.
3. **Ξεκινά μια νέα φάση διερεύνησης**, εάν το κοίτασμα παραμένει ελάχιστα γνωστό μετά την προηγούμενη φάση, ή εάν θεωρούμε ότι τα οικονομικά είναι οριακά.

Επειδή οι μεταλλευτικές επενδύσεις είναι γενικά μεγάλες, οι οικονομικές συνέπειες της απόφασης αυτής είναι πολύ σημαντικές. Γι' αυτό, είναι σημαντικό να εξετάσουμε τη μεταλλοφορία και το δυναμικό της με πολύ προσοχή. Ιδιαίτερα, είναι βασικό να εκμεταλλευτούμε πλήρως όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες σε κάθε στάδιο λήψης αποφάσεων.

Έτσι λοιπόν, η εκτίμηση αποθεμάτων είναι μια διαδικασία και όχι ένα μεμονωμένο γεγονός. Τα αποθέματα πάντα εκτιμώνται σταδιακά, και γενικά με περισσότερες πληροφορίες καθώς το έργο προχωρά. Το ενδιαφέρον με τη γεωστατιστική είναι ότι μας προσφέρει ένα συμπαγές θεωρητικό πλαίσιο για την εκτίμηση αποθεμάτων που αξιοποιεί στο μέγιστο τις διαθέσιμες πληροφορίες.

Η Έλλειψη Πληθώρας Δεδομένων

Έχουμε ήδη πει ότι ο όγκος των διαθέσιμων πληροφοριών αυξάνει με το χρόνο. Παρά το γεγονός αυτό, ο όγκος των δεδομένων που χρησιμοποιούνται στην τελική εκτίμηση αποθεμάτων πριν το ξεκίνημα της εξόρυξης συνεχίζει να παρέχει ελάχιστες πληροφορίες.

Παράδειγμα

Ένα μεγάλο κοίτασμα μετάλλου διερευνάται σε πλέγμα 100 x 100 m και πυρήνες 38 mm εκ των οποίων το μισό αναλύεται. Πρόκειται για μια συνηθισμένη διάταξη, για παράδειγμα, σε ένα μεγάλο κοίτασμα πορφυρικού χαλκού. Η πυκνότητα δειγματοληψίας, εκφραζόμενη ως αναλογία του συνολικού όγκου του κοιτάσματος, είναι 1.5×10^{-8}. Ακόμα και με γεωτρήσεις 10 x 10 m, που αποτελεί πολύ πυκνή διάταξη η οποία σπάνια θα μπορούσε να επιτευχθεί πριν το στάδιο ελέγχου περιεκτικότητας, η πυκνότητα θα ήταν πάλι πολύ χαμηλή: περίπου 1.5×10^{-6}. Η διάταξη αυτή θα σήμαινε λιγότερο από ένα τόνο δειγμάτων για κάθε εκατομμύριο τόνους κοιτάσματος, και είναι βάση οποιονδήποτε στατιστικών προδιαγραφών πολύ χαμηλή.

Ποιότητα Δειγμάτων

Το στατιστικό πρόβλημα της πολύ μικρής (ογκομετρικά) δειγματοληψίας δεν είναι το μοναδικό που αντιμετωπίζουμε – συνδυάζεται με αυτό της ποιότητας δειγματοληψίας.

Η απόληψη μπορεί να είναι προβληματική σε μερικά σημεία. Διαφορετικές γεωτρητικές τεχνικές δίνουν δείγματα διαφορετικής ποιότητας. Ο χειρισμός των δειγμάτων μπορεί να επηρεάσει την αξιοπιστία τους. Δείγματα κάτω από τον υδροφόρο ορίζοντα μπορεί να είναι λιγότερο αξιόπιστα όταν γίνεται χρήση δονητικών γεωτρητικών τεχνικών. Σφάλματα μπορούν να εισέλθουν κατά τον διαχωρισμό και την ανάλυση των δειγμάτων. Όλοι αυτοί οι παράγοντες μπορούν να μειώσουν την αντιπροσωπευτικότητα ενός δείγματος.

Γεωλογία

Είναι αυτονόητο ότι οι γεωτρητικές πληροφορίες καλής ποιότητας είναι σημαντικές. Ακόμα περισσότερο, είναι στοιχειώδες το μοντέλο που χρησιμοποιείται στην εκτίμηση αποθεμάτων να βασίζεται στην καλύτερη δυνατή ερμηνεία των διαθέσιμων δεδομένων, των αναλύσεων και των ποιοτικών παρατηρήσεων. Το γεωλογικό μοντέλο χρειάζεται να είναι συνεχές και να αναπαριστά επαρκώς τους βασικούς γεωμετρικούς παράγοντες που επηρεάζουν την κατανομή της περιεκτικότητας.

Γενικά, όσο πιο πολύπλοκη είναι η γεωλογία, τόσο πιο σημαντικός θα είναι ο ρόλος της στην εκτίμηση αποθεμάτων. Η γεωμετρία της μεταλλοφορίας είναι συχνά ο κύριος καθοριστικός παράγοντας στην εκτίμηση του τονάζ. Είναι απαραίτητος ο ξεκάθαρος διαχωρισμός μεταξύ εκείνων των παραγόντων που ενδιαφέρουν την ανάπτυξη των γενετικών και ερευνητικών μοντέλων και εκείνων που επηρεάζουν την κατανομή του μεταλλεύματος σε κλίμακα που να ενδιαφέρει τον μεταλλειολόγο.

Άλλοι Παράγοντες

Ο πιο σημαντικός εναπομείνας παράγοντας είναι η μέθοδος εξόρυξης. Υπάρχουν πολλά θέματα που προέρχονται από τους εξορυκτικούς παράγοντες κατά την εκτίμηση αποθεμάτων. Τα θέματα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά και θα εξετασθούν με λεπτομέρεια αργότερα.

Η Εκτίμηση στα Διάφορα Στάδια Ενός Έργου

Πρώτη Εκτίμηση (Αναγνώριση)

Είναι το αρχικό στάδιο ενός πιθανού μεταλλευτικού έργου.

- Οι πληροφορίες είναι ουσιαστικά ποιοτικές και γεωλογικές.
- Υπάρχουν λίγα ή μερικές φορές καθόλου δείγματα.
- Τα δείγματα που υπάρχουν τείνουν να βρίσκονται σε ευνοϊκές θέσεις, και γι' αυτό είναι ομαδοποιημένα.

Οποιαδήποτε εκτίμηση αποθεμάτων στο στάδιο αυτό θα είναι σίγουρα αναξιόπιστη. Ο κύριος στόχος είναι να δούμε, σε συγκριτική βάση, εάν υπάρχει λόγος για συνέχιση των εργασιών. Οι αποφάσεις θα ληφθούν βάσει της γεωλογίας και άλλων συγκεκριμένων τεχνικών ποιοτικών παραγόντων. Η γεωστατιστική εκτίμηση δεν βοηθά πολύ: πρόκειται ουσιαστικά για μια πρώτη γεωλογική θεώρηση. Παρόλα αυτά, το βαριόγραμμα (με το οποίο θα εξοικειωθούμε πολύ στο βιβλίο αυτό) μπορεί να αποτελέσει ένα άριστο διαγνωστικό εργαλείο ακόμα και στο πιο αρχικό στάδιο.

Πρώτη Συστηματική Δειγματοληψία

Εφόσον εντοπίσουμε τη θέση της μεταλλοφορίας, κάνουμε συνήθως μια συστηματική δειγματοληψία της ζώνης ενδιαφέροντος. Ο στόχος είναι να λάβουμε μια πρώτη εκτίμηση των συνολικών in-situ αποθεμάτων. Αυτή περιλαμβάνει:

- Τον καλύτερο δυνατό ορισμό των ορίων της μεταλλοφορίας (γεωμετρία).
- Εκτίμηση της συνολικής μέσης περιεκτικότητας.
- Εκτίμηση του συνολικού in-situ τονάζ.

Χρησιμοποιούνται ποιοτικά (γεωλογικά) και ποσοτικά (αναλυτικά) δεδομένα. Στο συνολικό αυτό επίπεδο, δεν υπάρχει πρόβλημα στην επιλογή του τρόπου εκτίμησης με την προϋπόθεση ότι η δειγματοληψία είναι πραγματικά συστηματική.

Ακρίβεια

Η ακρίβεια είναι ένα μέτρο που χρησιμοποιείται στην κλασική στατιστική για την ποσοτική απόδοση της δυνατότητας επανάληψης μιας εκτίμησης (ή παρατήρησης). Έτσι, το θεωρητικό αντίστοιχο στην εκτίμηση αποθεμάτων είναι η διακύμανση εκτίμησης που εξετάζεται σε βάθος στο Κεφάλαιο 6. Είναι δυνατό να έχουμε μια ακριβή εκτίμηση που έχει χαμηλή πιστότητα (το πόσο κοντά είναι η εκτιμώμενη περιεκτικότητα στην πραγματικότητα). Η πιστότητα είναι πολύ ευαίσθητη στις αποκλίσεις. Καμιά μεθοδολογία εκτίμησης δεν μπορεί να αντιμετωπίσει επαρκώς τις αποκλίσεις δειγματοληψίας ή αναλύσεων.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια της εκτίμησης είναι σημαντική. Εξαρτάται κυρίως από τα εξής:

- Τον αριθμό και το είδος των δειγμάτων (δηλαδή τη γεωμετρία του δειγματοληπτικού καννάβου).
- Την κανονικότητα και συνέχεια της μεταλλοφορίας (δηλαδή τη μεταβλητότητα των in-situ περιεκτικοτήτων).

Από τη γεωστατιστική θεωρία μπορεί εύκολα να πει κανείς ότι ένας γεωλόγος ή μηχανικός που αισθάνεται ότι ένας κανονικός κάνναβος επιφέρει πιο ακριβείς εκτιμήσεις έχει δίκιο, γεγονός που θα μας απασχολήσει αργότερα. Στο στάδιο της εκτίμησης αποθεμάτων με τα πρώτα συστηματικά δεδομένα υπάρχουν πολλοί σημαντικοί παράγοντες που θα πρέπει να εξετάσουμε.

Είδος Δείγματος

Το είδος του δείγματος είναι πολύ σημαντικό – γεώτρηση ή κανάλι, πυρήνας γεώτρησης ή ψήγματα, κλπ. Το τι αντιπροσωπεύει το κάθε είδος δείγματος είναι φανερά σημαντικό. Είναι ουσιώδες να εξετάσουμε τον όγκο των δειγμάτων, τη γεωμετρία τους και τον προσανατολισμό τους: με λίγα λόγια αυτό που οι γεωστατιστικοί αποκαλούν τη *στήριξη* των δειγμάτων.

Η ιδέα της στήριξης του δείγματος είναι κεντρικό σημείο της γεωστατιστικής. Μάλιστα, αντιπροσωπεύει μια από τις πιο σημαντικές συνεισφορές της γεωστατιστικής θεωρίας στην πρακτική εκτίμηση αποθεμάτων. Με το θέμα αυτό θα ασχοληθούμε λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 5.

Ταξινόμηση Αποθεμάτων

Τα αποθέματα γενικώς ταξινομούνται, και κάθε σύστημα ταξινόμησης καθιερώνει μερικώς μια νομενκλατούρα σχετική με την ακρίβεια. Οι κατηγορίες ποικίλουν από χώρα σε χώρα, παρόλο που τα τελευταία 15 χρόνια υπάρχει μια κάποια σύγκλιση μεταξύ των διαφόρων συστημάτων. Ένας κλασικός διαχωρισμός που γίνεται, για παράδειγμα, είναι ανάμεσα σε Πιθανά και Βεβαιωμένα αποθέματα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι ορισμοί βασίζονται σε όρους πλήθους ερευνητικών δειγματοληψιών και ορυγμάτων, παρά σε όρους μιας ποσοτικής συνέχειας της μεταλλοφορίας.

Η συνέχεια της μεταλλοφορίας μπορεί να είναι αρκετά ανεξάρτητη από τη συνέχεια της γεωμετρίας. Μπορεί να ισχύει ο εξής σημαντικός διαχωρισμός: ένα σώμα χαλαζία μπορεί να είναι ξεκάθαρα συνεχές από γεώτρηση σε γεώτρηση σε διαστήματα 100 x 50 m, αλλά οι σχετικές περιεκτικότητες σε χρυσό μπορούν να είναι εντελώς άσχετες μεταξύ τους.

Στο Παράρτημα Β δίνεται ο κώδικας αναφοράς και ταξινόμησης αποθεμάτων όπως ορίστηκε τον Οκτώβριο του 2001 από το Ινστιτούτο Υλικών, Ορυκτών και Μεταλλευτικής – Institute of Materials, Minerals and Mining (IOM[3]) σε συνεργασία με την Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Γεωλόγων – European Federation of Geologists (EFG), το Σύλλογο Γεωλογίας του Λονδίνου και το Ινστιτούτο Γεωλόγων της Ιρλανδίας, μεταφρασμένος στην Ελληνική γλώσσα.

Απολήψιμα Αποθέματα στο Πρώτο Στάδιο

Μπορούμε να ορίσουμε την *Επιλεκτική Μονάδα Εξόρυξης* (ΕΜΕ) ως τη μικρότερη εκμεταλλεύσιμη ποσότητα στην οποία επιτρέπεται ο διαχωρισμός μεταξύ στείρων και μεταλλεύματος. Το μέγεθος της ΕΜΕ ορίζει την επιλεκτικότητα της εξορυκτικής λειτουργίας. Επειδή η απόληψη του μεταλλεύματος σε ένα λειτουργικό ορυχείο είναι συνάρτηση της ΕΜΕ, είναι βασικό η εκτίμηση των απολήψιμων αποθεμάτων να λαμβάνει υπόψη της την απαιτούμενη ΕΜΕ.

Η γεωστατιστική διαθέτει τεχνικές που κάνουν εφικτή την εκτίμηση απολήψιμων αποθεμάτων ακόμα και σε αυτό το πρώτο στάδιο, για παράδειγμα, με το μοντέλο DG (Discrete Gaussian). Πρόκειται για μια τεχνική εκτίμησης συνολικών απολήψιμων αποθεμάτων που μπορεί να εφαρμοστεί μόλις μπορέσουμε να ορίσουμε με κάποια σαφήνεια το βαριόγραμμα, το ιστόγραμμα και τη γεωμετρία της μεταλλοφορίας. Όμως σε αυτό το πρώτο στάδιο τα τοπικά απολήψιμα αποθέματα, δηλαδή αυτά που καθορίζουν το ποσό των ΕΜΕ που επιλέγονται ως μετάλλευμα – για κάποιο προκαθορισμένο όριο εκμεταλλευσιμότητας – δεν είναι δυνατό να υπολογισθούν. Έτσι είναι απαραίτητο να προχωρήσουμε σε πιο πυκνή δειγματοληψία.

Λεπτομερής Δειγματοληψία

Αυτό είναι το στάδιο όπου λαμβάνονται πιο πυκνά γεωτρητικά δείγματα και έτσι:

- Έχουμε πιο πολλά δείγματα και καλύτερο ορισμό του ιστογράμματος της περιεκτικότητας.
- Μπορούμε να ορίσουμε καλύτερα τη χωρική κατανομή της περιεκτικότητας.
- Συνήθως έχουμε βελτιωμένα γεωλογικά μοντέλα και κατά συνέπεια καλύτερο ορισμό του συνολικού τονάζ.

Το στάδιο αυτό της εκτίμησης είναι συνήθως κρίσιμο. Μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές, κάθε φορά παίρνοντας περισσότερα δείγματα, εάν αυτό απαιτείται. Τα αποτελέσματα θα χρησιμοποιηθούν για να γίνουν τα σχέδια του ορυχείου και η τεχνικοοικονομική μελέτη. Είναι δύσκολο να εκτιμηθούν τα αποθέματα ακόμα και σε αυτό το στάδιο και οι συνέπειες των όποιων λαθών είναι αρκετά μεγάλες.

Σπανίως ένα κοίτασμα εξορύσσεται πλήρως ως μετάλλευμα κατά τη μεταλλευτική λειτουργία για δύο κύριους λόγους:

1. **Τεχνικός λόγος:** αφορά την πρόσβαση στο υλικό που αποτελεί το μετάλλευμα.
2. **Οικονομικός λόγος:** γενικώς πρέπει να καθορίσουμε κάποιο υλικό ως μετάλλευμα και κάποιο ως στείρο. Με άλλα λόγια, κάνουμε μια επιλογή υλικού που θα επεξεργαστεί ως μετάλλευμα και υλικού που θα οδηγηθεί στις αποθέσεις στείρων.

Επειδή θα εκμεταλλευτούμε μόνο ένα μέρος του μεταλλεύματος από την in-situ μεταλλοφορία, θα πρέπει να ορίσουμε δύο αντίστοιχα είδη εκτίμησης αποθεμάτων:

In-Situ αποθέματα: χαρακτηρισμός των πλούσιων και φτωχών ζωνών του κοιτάσματος χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η μέθοδος εξόρυξης που θα χρησιμοποιηθεί. Πρόκειται για τους **Ορυκτούς Πόρους** σύμφωνα με τον Κώδικα του Παραρτήματος Β.

Απολήψιμα αποθέματα: χαρακτηρισμός των αποθεμάτων ως συνάρτηση τεχνικών παραμέτρων (μέθοδος εξόρυξης) και οικονομικών κριτηρίων (τιμές και κόστος). Πρόκειται για τα **Ορυκτά Αποθέματα** σύμφωνα με τον Κώδικα του Παραρτήματος Β.

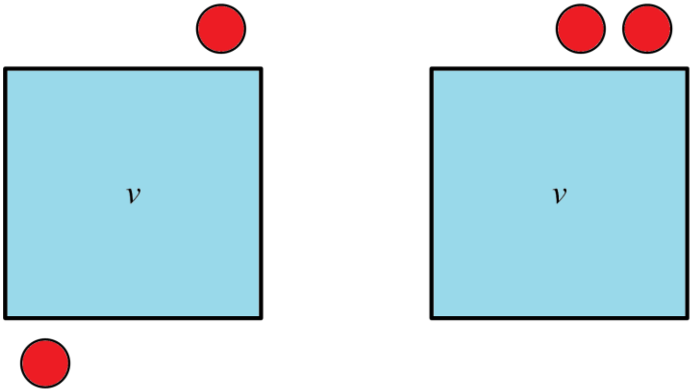
Τοπική Εκτίμηση In-Situ Αποθεμάτων

Σε αντίθεση με τη συνολική εκτίμηση των in-situ αποθεμάτων, για την τοπική εκτίμηση τους, η επιλογή ενός συγκεκριμένου εκτιμητή αποτελεί μια σημαντική απόφαση. Πολλοί διαφορετικοί τοπικοί εκτιμητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ο καθένας δίνοντας εκτιμήσεις μπλοκ ή τμημάτων μεταλλεύματος που προκύπτουν από πληροφορίες τοπικών δειγμάτων. Θα εξετάσουμε μερικούς από αυτούς στην επόμενη ενότητα.

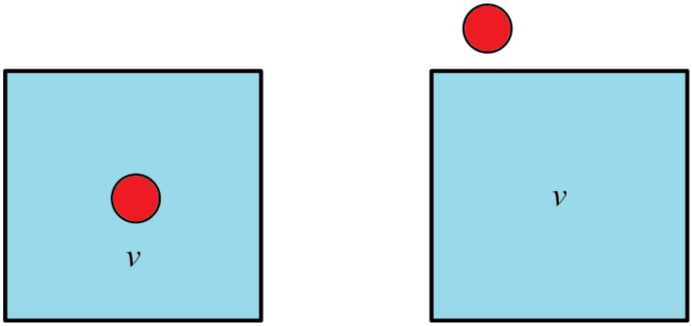
Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό μιας εκτίμησης είναι ότι θα πρέπει να είναι αντικειμενική. Ένας αντικειμενικός εκτιμητής δεν προκαλεί συστηματική υπό ή υπέρ εκτίμηση των αποθεμάτων. Θέλουμε επίσης ο εκτιμητής μας να κάνει τη 'βέλτιστη' χρήση των διαθέσιμων πληροφοριών, και με αυτήν την έννοια ψάχνουμε τη 'βέλτιστη' εκτίμηση. Φυσικά, θα πρέπει να δώσουμε την ακριβή σημασία του 'βέλτιστου' στην περίπτωση αυτή.

Εφόσον χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις των αποθεμάτων για οικονομικές μελέτες, μας φαίνεται φυσικό το ότι θα πρέπει να αναζητήσουμε κάποιο χαρακτηρισμό της ποιότητας της εκτίμησης. Υπάρχουν περιοχές που εκτιμώνται καλύτερα από άλλες; Από ποιους παράγοντες εξαρτάται η ποιότητα (ή η ακρίβεια) της εκτίμησης μας; Μερικοί σημαντικοί παράγοντες είναι οι εξής:

- Κατ' αρχήν, είναι προφανές ότι η ομοιογένεια της μεταλλοφορίας είναι ένας κρίσιμος παράγοντας στην αξιοπιστία ή την ποιότητα των τοπικών μας εκτιμήσεων αποθεμάτων. Κατά τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση των συνολικών, με δεδομένο το πλήθος των δειγματοληπτικών πληροφοριών, μια πιο συνεχής μεταλλοφορία θα επιτρέψει καλύτερα αποτελέσματα τοπικών εκτιμήσεων από μια ακανόνιστη μεταλλοφορία.
- Η διάταξη της δειγματοληψίας είναι επίσης ένας σημαντικός παράγοντας. Εάν εξετάσουμε τις δύο δειγματοληπτικές διατάξεις στο Σχήμα 1.1 φαίνεται λογικό η πρώτη περίπτωση να επιτρέψει πιο καλή (ακριβέστερη) εκτίμηση του μπλοκ από τη δεύτερη. Η διάταξη δειγματοληψίας (συχνά αναφερόμενη ως 'γεωμετρία δειγματοληψίας') έχει μια δυνατή επιρροή στην ποιότητα της τοπικής εκτίμησης. Για μια δοσμένη διάταξη (Σχήμα 1.2), θα έχουμε καλύτερη εκτίμηση ενός μπλοκ από ένα μοναδικό δείγμα εάν το δείγμα αυτό είναι εντός του μπλοκ. Πιο συγκεκριμένα, η ιδανική θέση ενός δείγματος θα ήταν λογικά στο κέντρο του μπλοκ που εκτιμούμε (κάτι που απορρέει από τη γεωστατιστική θεωρία όπως θα δούμε αργότερα).



Σχήμα 1.1 Δύο πιθανές διατάξεις δειγματοληψίας.



Σχήμα 1.2: Δύο ακόμα πιθανές διατάξεις δειγματοληψίας.

- Τέλος, η γεωμετρία του μπλοκ ή τμήματος που θα εκτιμηθεί παίζει ρόλο στην ποιότητα της εκτίμησης. Σε αυτή συμπεριλαμβάνονται και οι σχετικές διαστάσεις του μπλοκ σε σχέση με το διάστημα δειγματοληψίας.

Εάν λάβουμε υπόψη τους παραπάνω παράγοντες είναι πιθανό να εκτιμήσουμε την ποιότητα οποιουδήποτε εκτιμητή και επομένως να επιλέξουμε εκείνο που θα καλύψει καλύτερα τα ποιοτικά μας κριτήρια.

Εκτίμηση Απολήψιμων Αποθεμάτων

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει σαφές ότι με τον όρο απολήψιμα αποθέματα δεν συμπεριλαμβάνουμε την τεχνικοοικονομική πλευρά των αποθεμάτων. Αργότερα στον όρο αυτό θα συμπεριλάβουμε την επίδραση της ΕΜΕ. Τα απολήψιμα αποθέματα επηρεάζονται επίσης από το όριο εκμεταλλευσιμότητας και άλλες τεχνικές παραμέτρους (π.χ. το ελάχιστο πλάτος εξόρυξης). Στην περίπτωση ενός υπαίθριου ορυχείου υπάρχουν ξεκάθαροι τεχνικοί περιορισμοί με την έννοια ότι πριν εξορύξουμε ένα μπλοκ θα πρέπει να εξορύξουμε όλα τα άλλα πάνω από αυτό. Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που δρουν κατά τον καθορισμό της απολημψιμότητας των αποθεμάτων, αλλά οι δύο πιο σημαντικοί, σε ότι αφορά την εκτίμηση τους, παρουσιάζονται παρακάτω:

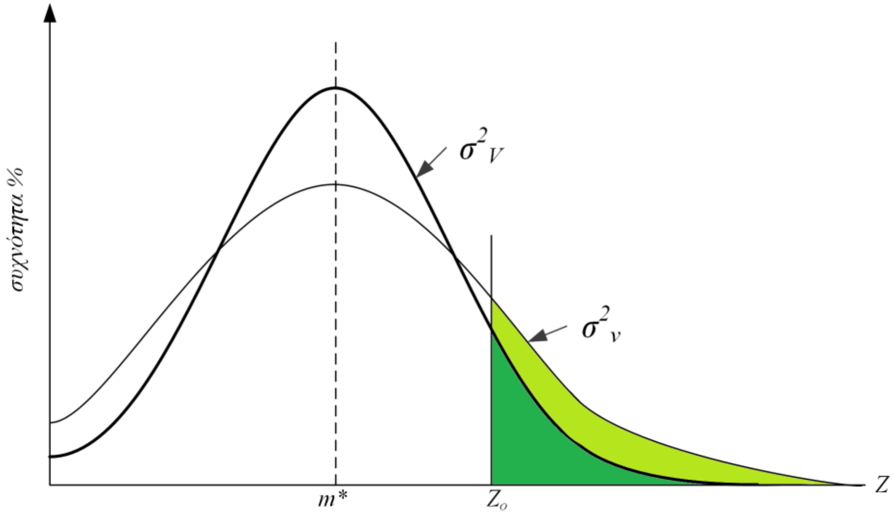
1. Η στήριξη των ΕΜΕ.
2. Το επίπεδο των πληροφοριών.

Η 'Στήριξη' των Επιλεκτικών Μονάδων Εξόρυξης

Η στήριξη είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται από τους γεωστατιστικούς για να περιγράψει το μέγεθος, τη γεωμετρία και τον προσανατολισμό της ΕΜΕ. Όσο πιο μικρή είναι η ΕΜΕ, τόσο καλύτερα μπορούμε να ξεχωρίσουμε ανάμεσα σε μετάλλευμα και στείρα, αλλά και τόσο μεγαλύτερο θα είναι το κόστος της εξόρυξης.

Το Σχήμα 1.3 δείχνει το φαινόμενο στήριξης της ΕΜΕ στο ιστόγραμμα των περιεκτικοτήτων. Σημειώστε ότι το *V* εκπροσωπεί μεγαλύτερη στήριξη από το *v*. Για παράδειγμα, το *V* θα μπορούσε να είναι μια ΕΜΕ 10 x 10 x 10 m και το *v* θα μπορούσε να είναι ένα μικρότερο μπλοκ, π.χ. 5 x 5 x 5 m. Υπάρχουν πολλά σημαντικά σημεία σε αυτά το δύο ιστογράμματα του σχήματος 1.3:

- Ο συνολικός μέσος όρος m^* και για τις δύο κατανομές είναι ο ίδιος. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση αντικειμενικών διατάξεων δειγματοληψίας. Η μέση περιεκτικότητα μεγάλων και μικρών μπλοκ είναι η ίδια.
- Το ιστόγραμμα της μικρότερης στήριξης είναι πιο ευρύ, δηλαδή εκτείνεται περισσότερο κατά τον άξονα *X* (που μετρά την περιεκτικότητα). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν πιο πολλές υψηλές και χαμηλές περιεκτικότητες στις μικρότερες στηρίξεις σε σύγκριση με τις μεγαλύτερες. Το εύρος μετριέται με τη διακύμανση που συμβολίζεται με το σ^2 στο σχήμα. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει διότι οι μεγάλες στηρίξεις αντιπροσωπεύουν ομάδες μικρότερων, και έτσι προκύπτει ένας μέσος όρος των μικρότερων στηρίξεων. Οι ακραίες τιμές τείνουν να εξομαλυνθούν όταν εξετάζουμε μεγάλες στηρίξεις. Θα περιμένουμε ένα μεγάλο μέρος των δειγμάτων να έχουν ενδιάμεσες περιεκτικότητες όταν εξετάζουμε μεγάλη στήριξη.
- Εάν εφαρμόσουμε το ίδιο ελάχιστο όριο εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας (Z_0) και στα δύο ιστογράμματα, θα υπάρχει περισσότερο περιεχόμενο μέταλλο πάνω από το όριο για τη μικρή στήριξη. Και πάλι, αυτό είναι λογικό, γιατί η χρήση μικρότερης στήριξης μας επιτρέπει να αποφύγουμε την αραίωση του υλικού υψηλής περιεκτικότητας με αναπόφευκτα χαμηλότερης περιεκτικότητας υλικό. Αυτό συνδέεται άμεσα με την ιδέα της 'επιλεκτικότητας' – η επιλογή μικρότερης ΕΜΕ οδηγεί στην εξόρυξη ενός μεγαλύτερου μέρους των ορυκτών πόρων.
- Αν όμως εφαρμόσουμε ένα όριο εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας κάτω από τον μέσο όρο και στα δύο ιστογράμματα, η κατάσταση αντιστρέφεται: στη μικρότερη στήριξη θα έχουμε περισσότερα στείρα από ότι στη μεγαλύτερη.



Σχήμα 1.3: Το φαινόμενο στήριξης.

Η φυσική σημασία της στήριξης είναι ιδιαίτερα γνωστή σε οποιοδήποτε γεωλόγο που ασχολείται με την αξιολόγηση γεωτρητικών δεδομένων – για παράδειγμα αξιολογώντας δείγματα 1 μέτρου σε σύνθετα δείγματα 2 μέτρων. Ο πίνακας 1.1 παρακάτω παρουσιάζει τις επιπτώσεις στα στατιστικά χαρακτηριστικά μιας τέτοιας αξιολόγησης (που συχνά αποκαλείται ως *κανονικοποίηση* από τους γεωστατιστικούς).

Επίπεδο Πληροφοριών

Τα περισσότερα ορυχεία χρησιμοποιούν πληροφορίες δειγμάτων από τις διατρήσεις παραγωγής – ή ειδικές πυκνές γεωτρήσεις ελέγχου περιεκτικότητας για να επιτραπεί ο διαχωρισμός μεταλλεύματος-στείρων. Ο στόχος της επιλεκτικής εξόρυξης είναι να μεταφερθούν στο εργοστάσιο εμπλουτισμού *μόνο* εκείνα τα μπλοκ που έχουν μέση περιεκτικότητα μεγαλύτερη από κάποιο όριο (μετάλλευμα) και να θεωρηθούν τα υπόλοιπα μπλοκ ως στείρα. Όμως, επειδή οι περιεκτικότητες πάνω στις οποίες στηριζόμαστε για αυτήν τη επιλογή είναι εκτιμήσεις, υπόκεινται στην **εξομάλυνση και το σφάλμα** – αναπόφευκτα θα γίνει και κάποια λάθος ταξινόμηση, δηλαδή

- Θα στείλουμε κάποια στείρα μπλοκ στον εμπλουτισμό (γιατί οι εκτιμήσεις τις περιεκτικότητας τους δείχνουν ότι πρόκειται για μετάλλευμα), και
- Θα στείλουμε κάποια μπλοκ μεταλλεύματος στις αποθέσεις στείρων (γιατί οι εκτιμήσεις τις περιεκτικότητας τους δείχνουν ότι πρόκειται για στείρα).

Και οι δύο αυτές λανθασμένες ταξινομήσεις μειώνουν τη μέση περιεκτικότητα των απολήψιμων αποθεμάτων και έτσι μειώνουν το κέρδος της επιχείρησης. Είναι λοιπόν σημαντικό κάθε στρατηγική επιλεκτικής εξόρυξης να στοχεύει στη βέλτιστη απόληψη του μεταλλεύματος, με την έννοια ότι θα πρέπει να ελαχιστοποιείται το ποσό της λανθασμένης ταξινόμησης μεταλλεύματος και στείρων.

Πίνακας 1.1: Αξιολόγηση δειγμάτων 1m σε σύνθετα δείγματα 2m και η επίπτωση στις στατιστικές παραμέτρους.

	Au (1m)	**Au (2m)**
Τιμές Αρχικών και Σύνθετων Δειγμάτων	3,40	2,75
	2,10	
	2,00	1,50
	1,00	
	1,30	1,60
	1,90	
	12,20	7,95
	3,70	
	5,10	3,70
	2,30	
	3,20	2,65
	2,10	
	3,00	2,50
	2,00	
	6,00	3,55
	1,10	
Μέσος όρος	***3,28***	***3,28***
Διακύμανση	***7,56***	***4,19***
Τυπική Απόκλιση	***2,75***	***2,05***
Ελάχιστη τιμή	***1,00***	***1,50***
Μέγιστή τιμή	***12,20***	***7,95***
Εύρος	***11,20***	***6,45***

Η *επιρροή των πληροφοριών* αναφέρεται στη σχέση μεταξύ του πλήθους και του διαστήματος της δειγματοληψίας που διατίθεται κατά τη χρονική στιγμή του διαχωρισμού μεταλλεύματος-στείρων και του πλήθους και μεγέθους των σφαλμάτων διαχωρισμού. Η επιρροή αφορά την έλλειψη πληροφοριών τη χρονική στιγμή που θα πρέπει να ξεχωρίσουμε τα μπλοκ μεταλλεύματος και στείρων. Στο σημείο αυτό έχουμε μόνο εκτιμήσεις για τις περιεκτικότητες των μπλοκ αντί των αληθινών ή 'πραγματικών' περιεκτικοτήτων. Θα πρέπει να γίνει έντονα κατανοητό ότι οι εκτιμήσεις είναι πάντα εξομαλυσμένες σε σχέση με την πραγματικότητα. Εάν μπορούσαμε να επιλέξουμε με βάση πραγματικές περιεκτικότητες δεν θα κάναμε λάθη – θα ταξινομούσαμε σωστά όλα τα μπλοκ. Ουσιαστικά, το πρόβλημα μας είναι ότι επιλέγουμε με βάση εξομαλυσμένες εκτιμήσεις, αλλά τροφοδοτούμε το εργοστάσιο εμπλουτισμού με πραγματικές (μη εξομαλυσμένες) περιεκτικότητες.

Μπορούμε να δείξουμε την επιρροή των πληροφοριών χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα διασποράς των πραγματικών περιεκτικοτήτων (άξονας Y) και των εκτιμήσεων (άξονας X) όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4. Ιδανικά, κάθε εκτίμηση μπλοκ θα είναι ίση με την αντίστοιχη πραγματική περιεκτικότητα, και όλα τα σημεία στο γράφημα θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $X = Y$. Εξαιτίας της επιρροής των πληροφοριών, στην πράξη αυτό δεν συμβαίνει ποτέ, και τα σημεία θα δημιουργούν ένα νέφος, που εδώ δίνεται ως μια έλλειψη. Η περιοχή του γραφήματος μπορεί να διαιρεθεί σε τεταρτημόρια ανάλογα με την ταξινόμηση (ή τη λανθασμένη ταξινόμηση) των μπλοκ σε μετάλλευμα και στείρα:

(I) Η πραγματική περιεκτικότητα του μπλοκ είναι πάνω από το όριο, αλλά η εκτίμηση μας κάτω από αυτό. Έτσι στέλνουμε μετάλλευμα στις αποθέσεις στείρων.

(II) Η πραγματική περιεκτικότητα είναι πάνω από το όριο καθώς και η εκτίμηση μας. Έτσι ταξινομούμε σωστά το μπλοκ και το στέλνουμε με κέρδος για επεξεργασία.

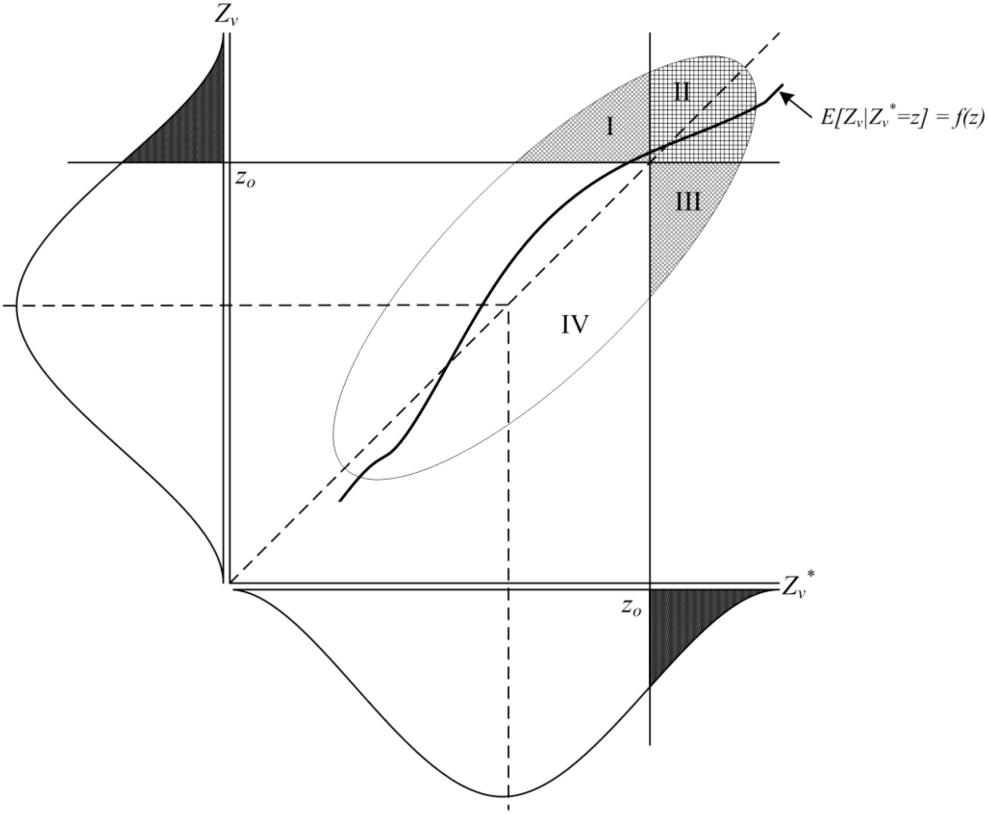
(III) Η πραγματική περιεκτικότητα είναι κάτω από το όριο αλλά η εκτίμηση μας είναι πάνω από αυτό. Έτσι στέλνουμε ζημιογόνα στείρα για επεξεργασία.

(IV) Η πραγματική περιεκτικότητα είναι κάτω από το όριο καθώς και η εκτίμησης μας οπότε σωστά στέλνουμε το μπλοκ στις αποθέσεις στείρων.

Είναι φανερό ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τα I και III και να μεγιστοποιήσουμε τα II και IV. Επίσης έπεται ότι θα ευχόμαστε να έχουμε έναν εκτιμητή που να οδηγεί σε ένα διάγραμμα διασποράς με τον κύριο άξονα της έλλειψης περίπου στις 45^o. Αυτό γιατί κάθε απόκλιση από τη θέση αυτή οδηγεί σε αυξανόμενο σφάλμα υπό συνθήκη. Θέλουμε επίσης να κάνουμε την έλλειψη όσο το δυνατό πιο λεπτή ώστε να μειώσουμε τα σφάλματα λανθασμένης ταξινόμησης.

Το θέμα του σφάλματος υπό συνθήκη εξετάζεται στο σχήμα 1.4. Παρουσιάζεται μια περίπτωση όπου η εκτίμηση είναι συνολικά αντικειμενική (δηλαδή ο μέσος των εκτιμήσεων είναι ίσος του μέσου των πραγματικών περιεκτικοτήτων). Η αναμενόμενη πραγματική περιεκτικότητα των μπλοκ που έχουν μια δοσμένη εκτίμηση μπορούν να αποδοθούν γραφικά για ένα εύρος εκτιμήσεων. Εάν διαγράψουμε μια καμπύλη με τα σημεία που προκύπτουν, λαμβάνουμε την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή που δίνεται στο σχήμα 1.4. Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει σφάλμα υπό συνθήκη αυτή η γραμμή θα πρέπει να είναι ευθεία, που να αντιστοιχεί και πάλι στην $Y = X$. Σε μια τέτοια περίπτωση, η μέση περιεκτικότητα των μπλοκ πάνω από το όριο εκτιμάται σωστά για όλα τα όρια.

Στην πραγματικότητα ποτέ δεν γνωρίζουμε τις πραγματικές περιεκτικότητες των μπλοκ: οι πιο πολύτιμες πληροφορίες που έχουμε είναι οι ίδιες οι εκτιμήσεις μας. Έτσι, θέλουμε οι εκτιμήσεις μας να είναι όσο το δυνατό πιο αντικειμενικές, με άλλα λόγια, θέλουμε η καμπύλη της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής του σχήματος 1.4 να αποκλίνει όσο το δυνατό λιγότερο από τη διχοτόμο των 45^o. Παρακάτω θα δείξουμε ότι οι πολυγωνικοί εκτιμητές είναι πάντα πολύ υποκειμενικοί.



Σχήμα 1.4: Διάγραμμα διασποράς πραγματικής περιεκτικότητας έναντι εκτίμησης.

Εκτίμηση Αποθεμάτων

Στο σημείο αυτό με τον όρο αποθέματα εννοούμε πλέον εκείνους τους πόρους οι οποίοι έχουν εκτιμηθεί με έναν ‘επαρκή’ βαθμό εμπιστοσύνης και εφόσον:

- Έχει ολοκληρωθεί μια μελέτη τεχνικής και οικονομικής σκοπιμότητας, και
- Το απόθεμα δίνεται σε όρους εξορύξιμου τονάζ και περιεκτικότητας.

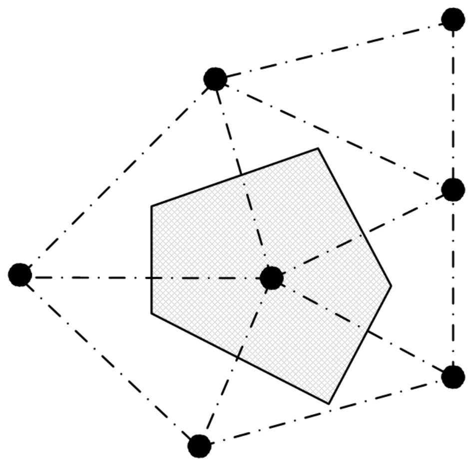
Προφανώς ο δεύτερος παράγοντας (και εν μέρει η τεχνική απαίτηση του πρώτου παράγοντα) υπονοεί ότι οι απολήψιμοι πόροι εκτιμώνται ως η βάση για το ορυκτό απόθεμα. Τα απολήψιμα αποθέματα συνυπολογίζουν το φαινόμενο στήριξης και επιπρόσθετα τους άλλους τεχνικούς παράγοντες (αραίωση, μέθοδοι εξόρυξης, περιορισμοί) και όποιες οικονομικές απαιτήσεις.

Ανασκόπηση των Κυριοτέρων Τεχνικών Εκτίμησης Αποθεμάτων

Ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων των μεθόδων που θα εξετασθούν παρακάτω είναι ότι όλοι οι εκτιμητές είναι *γραμμικοί συνδυασμοί* των δεδομένων.

Μέθοδοι Πολυγώνων

Οι πολυγωνικές μέθοδοι έχουν τη μακρύτερη ιστορία χρήσης για προβλήματα εκτίμησης στη μεταλλευτική. Κάθε δείγμα τοποθετείται στο κέντρο ενός πολυγώνου που ορίζεται από τις μεσοκαθέτους τμημάτων που ορίζονται από ζεύγη δειγμάτων (Σχήμα 1.5). Η μέση περιεκτικότητα κάθε πολυγώνου είναι η περιεκτικότητα του κεντρικού δείγματος.



Σχήμα 1.5: Η ιδέα της πολυγωνικής εκτίμησης.

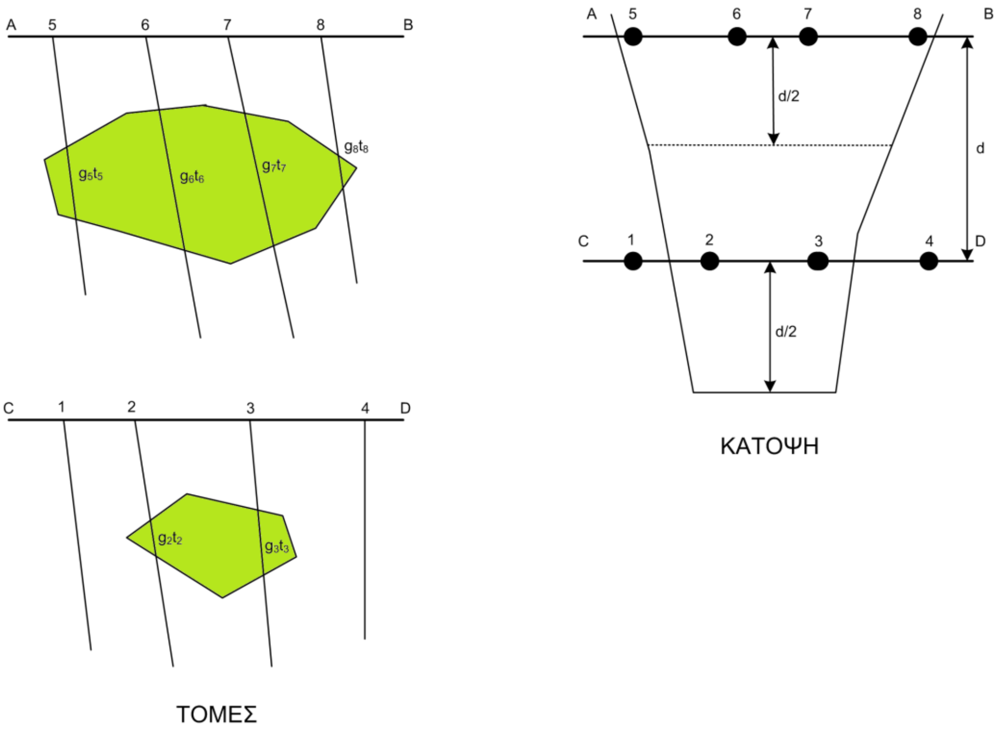
Ο εκτιμητής αυτός έχει το πλεονέκτημα ότι είναι αρκετά απλός να υπολογιστεί πρακτικά. Επιπρόσθετα, δοσμένης μιας διάταξης δειγματοληψίας μη ομαδοποιημένης, η πολυγωνική μέθοδος θα οδηγήσει σε μια αντικειμενική εκτίμηση των συνολικών πόρων. Παρόλα αυτά, σε ότι αφορά την τοπική εκτίμηση, η πολυγωνική μέθοδος είναι μη αποδεκτή διότι:

1. Δεν λαμβάνει υπόψη τον συσχετισμό της μεταλλοφορίας στο χώρο.
2. Δεν χρησιμοποιεί άλλα δεδομένα εκτός από το δείγμα στο κέντρο.
3. Γενικά οδηγεί σε μεγάλα σφάλματα υπό συνθήκη.

Ιδιαίτερα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι πολυγωνική εκτιμητές σφάλουν υπερβολικά όταν χρησιμοποιούνται για να εκτιμήσουν απολήψιμους πόρους, και μάλιστα το ιστόγραμμα των εκτιμήσεων *ταυτίζεται* με αυτό των δειγμάτων. Το φαινόμενο στήριξης μπορεί να έχει ιδιαίτερη επιρροή στην περιεκτικότητα πάνω από ένα δοσμένο όριο, αλλά δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που οι περισσότερες πολυγωνικές εκτιμήσεις (ειδικά για τον χρυσό) απαιτούν υπερβολικό αποκλεισμό δειγμάτων.

Μέθοδοι Τομών

Συνήθως ο εκτιμητής αυτός χρησιμοποιείται μόνο για συνολικούς πόρους, παρόλο που μερικές φορές τα αποτελέσματα του αναφέρονται ανά τομή. Το Σχήμα 1.6 δείχνει τη βασική μεθοδολογία. Οι μέθοδοι τομών αντιπροσωπεύουν μια επέκταση της ιδέας της πολυγωνικής εκτίμησης στο χώρο.



Σχήμα 1.6: Μέθοδος τομών.

Η μέση περιεκτικότητα g_i των γεωτρητικών δειγμάτων στα τμήματα τις μεταλλοφορίας ζυγίζονται με το πάχος t_i του τμήματος και δίνονται σε μια περιοχή που ορίζεται στην τομή. Αυτή η περιοχή *A* μετριέται παραδοσιακά με ένα εμβαδόμετρο ή στις μέρες μας με ένα πρόγραμμα υπολογιστή. Η περιεκτικότητα της τομής υπολογίζεται από έναν ζυγισμένο μέσο:

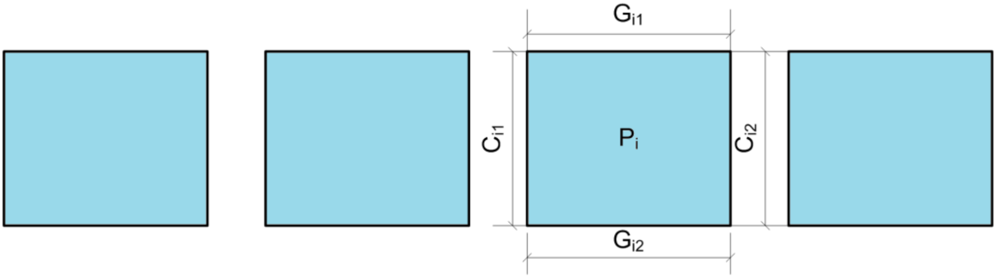
$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} g_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i} \qquad \textbf{Εξίσωση 1-1}$$

Η περιοχή της μεταλλοφορίας σε αυτήν τη τομή προβάλλεται έως το μέσο της απόστασης από την επόμενη τομή για να πάρουμε τον όγκο της μεταλλοφορίας. Χρησιμοποιώντας μια χειρονακτική τεχνική ο όγκος αυτός μπορεί να υπολογιστεί με απλή ορθογωνική προβολή. Χρησιμοποιώντας μεθόδους με υπολογιστή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας πιο πολύπλοκος τρόπος ορισμού του όγκου όπως ένας στερεός τριγωνισμός (solid triangulation – wireframing).

Η μέθοδος αυτή υποφέρει από τα περισσότερα προβλήματα που υπάρχουν στην πολυγωνική μέθοδο που περιγράψαμε προηγούμενα και είναι εφαρμόσιμη μόνο για συνολική εκτίμηση των in-situ πόρων για τους ίδιους λόγους. Η τοπική εκτίμηση δεν είναι ουσιαστικά εφικτή ακόμα και στο επίπεδο των τομών. Ιδιαίτερα δεν μπορεί να ληφθεί υπόψη η στήριξη ή ο συσχετισμός στο χώρο.

Εκτίμηση Τμημάτων Υπόγειων Έργων

Η μέθοδος αυτή έχει χρησιμοποιηθεί για τοπική εκτίμηση ιδιαίτερα επίπεδων φλεβών. Το Σχήμα 1.7 δίνει μια σχηματική απεικόνιση της μεθόδου αυτής.



Σχήμα 1.7: Εκτίμηση τμημάτων από υπόγεια ορύγματα.

Η μέση περιεκτικότητα του τμήματος P_i εκτιμάται από τον ζυγισμένο μέσο των περιεκτικοτήτων των στοών και μετώπων που το περιβάλουν:

$$t_{P_i} = \frac{t_{G_{i1}} \times G_{i1} + t_{G_{i2}} \times G_{i2} + t_{C_{i1}} \times C_{i1} + t_{C_{i2}} \times C_{i2}}{G_{i1} + G_{i2} + C_{i1} + C_{i2}} \qquad \textbf{Εξίσωση 1-2}$$

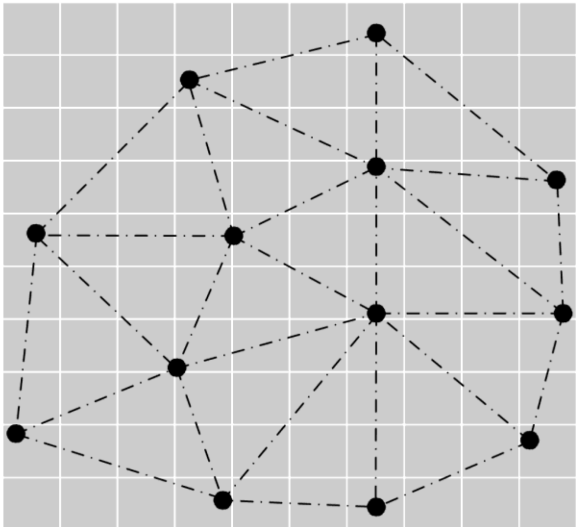
όπου t είναι η περιεκτικότητα και G και C είναι οι αντίστοιχες διαστάσεις των δειγματοληπτικών ορυγμάτων. Ο υπολογισμός αυτός είναι αρκετά ευθύς και εύκολα πραγματοποιήσιμος σε υπολογιστή. Δεν λαμβάνει υπόψη τη διάταξη των περιεκτικοτήτων στο χώρο. Ιδιαίτερα, μπορεί να οδηγήσει σε σοβαρό σφάλμα όταν υπάρχει ανισοτροπία.

Γενικά σε όλους τους γραμμικούς εκτιμητές υπάρχει η πιθανότητα εισαγωγής κάποιου σφάλματος στην εκτίμηση απολήψιμων πόρων λόγω του ότι η κατανομή των εκτιμώμενων περιεκτικοτήτων είναι πιο ομαλή από την κατανομή των πραγματικών περιεκτικοτήτων.

Μέθοδοι Τριγώνων

Αυτές οι μέθοδοι, που χρησιμοποιούνται σπάνια σήμερα, ήταν οι πρόγονοι της ζύγισης αντιστρόφου αποστάσεως. Υπάρχουν (ή μάλλον υπήρχαν) δύο παραλλαγές:

(i) Η μέση περιεκτικότητα ενός τριγώνου που ορίζεται από τα τρία γωνιακά δείγματα εκτιμάται από τη μέση τιμή τους (Σχήμα 1.8). Όταν χρησιμοποιείται για την εκτίμηση τοπικών in-situ πόρων, αυτή η μέθοδος έχει ακριβώς τα ίδια μειονεκτήματα με την προηγούμενη.



Σχήμα 1.8: Τριγωνική μέθοδος.

(ii) Μια δεύτερη προσέγγιση είναι η εκτίμηση μικρών μπλοκ. Κάθε μπλοκ εντός του τριγώνου εκτιμάται από ένα γραμμικό συνδυασμό των γωνιακών γεωτρήσεων. Τα βάρη που χρησιμοποιούνται είναι συχνά αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης του δείγματος από το μπλοκ. Και πάλι, αυτή η μέθοδος (παρόλο που μπορεί να πραγματοποιηθεί εύκολα στον υπολογιστή) αγνοεί παράγοντες σημαντικούς για την εκτίμηση.

Μέθοδοι Αντιστρόφου Αποστάσεως (ΑΑ)

Οι μέθοδοι αντιστρόφου αποστάσεως είναι πιο πρόσφατες από τις προηγούμενες τεχνικές, και έγιναν πιο δημοφιλείς με την εξάπλωση των υπολογιστών. Η εκτιμώμενη μεταλλοφορία διαιρείται σε μπλοκ, γενικά ιδίου μεγέθους. Η μέση περιεκτικότητα ενός μπλοκ εκτιμάται από έναν ζυγισμένο γραμμικό συνδυασμό γειτονικών δειγμάτων. Οι παράγοντες βαρύτητας δίνουν περισσότερο βάρος στα κοντινότερα δείγματα βάσει της εξίσωσης:

$$\lambda_i = \frac{\frac{1}{d_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{d_i^2}} \qquad \textbf{Εξίσωση 1-3}$$

όπου d_i είναι η απόσταση του δείγματος *i* από το κέντρο του μπλοκ που υπολογίζεται. Μόνο δείγματα εντός μιας δοσμένης 'ζώνης επιρροής' χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση. Η μέθοδος μπορεί να λάβει υπόψη τον συσχετισμό των περιεκτικοτήτων στον χώρο, αν και χονδρικά, εάν εφαρμοστεί με δύναμη μεγαλύτερη από δυο, δηλαδή:

$$\lambda_i = \frac{\dfrac{1}{d_i^{\alpha}}}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{d_i^{\alpha}}}$$ **Εξίσωση 1-4**

όπου *α* είναι η επιλεγμένη δύναμη. Για παράδειγμα, για να μειώσουμε το βάρος που δίνεται σε πιο απομακρυσμένα δείγματα μπορούμε να επιλέξουμε το *α* = 3 ή περισσότερο. Η τελική εκτίμηση είναι το άθροισμα όλων των γινόμενων συντελεστών βάρους λ_i επί των αντίστοιχων τιμών δείγματος $z(x_i)$:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)$$ **Εξίσωση 1-5**

Η μέθοδος ΑΑ είναι μια γενίκευση της τριγωνικής μεθόδου (η δεύτερη παραλλαγή που συζητήσαμε) και γίνεται εύκολα εφικτή στον υπολογιστή. Τα περισσότερα λογισμικά σχεδίασης ορυχείων μπορούν να πραγματοποιήσουν την ΑΑ. Παρόλο που αποτελεί ουσιαστική βελτίωση σε σχέση με τις πολυγωνικές μεθόδους, δεν μπορεί να λάβει υπόψη γνωστούς συσχετισμούς μεταξύ των περιεκτικοτήτων. Η μέθοδος στηρίζεται σε ένα αυθαίρετο μοντέλο για τη χωρική δομή της μεταλλοφορίας. Ιδιαίτερα, οι λόγοι που οδηγούν στην επιλογή του *α* δεν είναι ξεκάθαροι. Οι 'κλασικές' μέθοδοι δεν στηρίζονται στην πραγματική χωρική δομή των δεδομένων: αυτό είναι το κυριότερο μειονέκτημα τους.

Υπάρχουν παραλλαγές της ΑΑ που συμπεριλαμβάνουν την ανισοτροπία. Ο υπολογισμός βαριογραμμάτων γίνεται συχνά για να καθορίσει τις αναλογίες της ανισοτροπίας. Σε μια τέτοια περίπτωση η περισσότερη εργασία γίνεται προς την κατεύθυνση μιας γεωστατιστικής εκτίμησης, παρόλο που ο εκτιμητής ΑΑ (ακόμα και όταν συνυπολογίζει την ανισοτροπία) δεν μοντελοποιεί σωστά την κατανομή της περιεκτικότητας. Αυτό θα το συζητήσουμε με περισσότερη λεπτομέρεια στη συνέχεια.

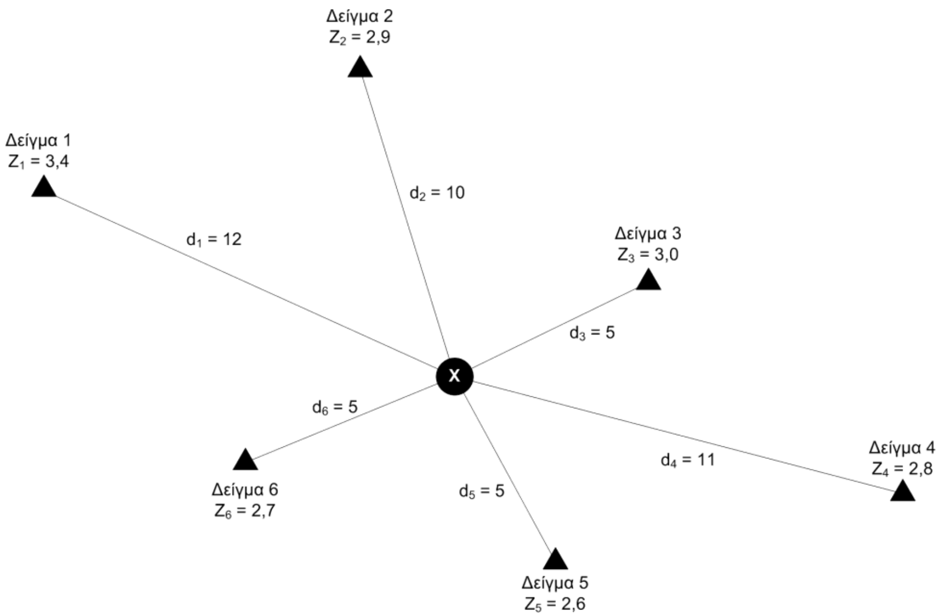
Σημειώστε ότι οι κλασικές μέθοδοι μπορούν να 'βελτιωθούν' μόλις αρχίσουμε την εξόρυξη. Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει τρόπος να πάρουμε τις 'βέλτιστες' εκτιμήσεις από τις τεχνικές αυτές *πριν* την εκμετάλλευση.

Παράδειγμα Εφαρμογής Μεθόδου Αντιστρόφου Αποστάσεως

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι θέσεις δειγμάτων γύρω από σημείο εκτίμησης, οι αποστάσεις τους από το σημείο αυτό καθώς και οι τιμές τους. Οι αποστάσεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών βάρους τους, ενώ οι τιμές τους συνδυάζονται με τους συντελεστές βάρους για τη λήψη της τελικής εκτίμησης.

Εφαρμόζοντας την Εξίσωση 1.3 σταδιακά, υπολογίζουμε τα τετράγωνα των αποστάσεων, τους αντιστρόφους τους, το άθροισμα όλων των αντιστρόφων, και τέλος, τους συντελεστές βάρους όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 1.2, το άθροισμα όλων των συντελεστών βάρους λ ισούται με τη μονάδα. Η υπολογιζόμενη τιμή του σημείου εκτίμησης είναι 2,80803, η οποία είναι ανάμεσα στην ελάχιστη τιμή δείγματος, 2,6 και τη μέγιστη 3,0. Τα δείγματα που βρίσκονται στις κοντινότερες αποστάσεις από το σημείο εκτίμησης (στα 5 μέτρα από αυτό) μοιράζονται το μεγαλύτερο μέρος τους βάρους.



Σχήμα 1.10: Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου αντιστρόφου αποστάσεως.

Πίνακας 1.2: Σταδιακός υπολογισμός συντελεστών βάρους δειγμάτων και τελική εκτίμηση με τη μέθοδο αντιστρόφου αποστάσεως.

Απόσταση (d)	**d^2**	**$1/d^2$**	**λ**	**z**	**λz**
12	144	0,00694	0,04782	3,4	0,16260
10	100	0,01000	0,06887	2,9	0,19971
5	25	0,04000	0,27547	3,0	0,82640
11	121	0,00826	0,05691	2,8	0,15936
5	25	0,04000	0,27547	2,6	0,71621
5	25	0,04000	0,27547	2,7	0,74376
	Άθροισμα:	0,14521	*1,00000*	***Τελική Εκτίμηση:***	**2,80803**

Kriging

Στις αρχές τις δεκαετίας του ΄60, ο George Matheron ανέπτυξε μια γενική λύση στο πρόβλημα της τοπικής εκτίμησης η οποία στηρίχθηκε σε μια εμπειρική λύση που αναπτύχθηκε από τον Νότιο-Αφρικανό D.G. Krige. Για να τιμήσει την πρωτοπόρο συνεισφορά του Krige σε αυτό το πεδίο, ο Matheron ονόμασε τη νέα τεχνική που ανέπτυξε *kriging*.

Το kriging είναι ένας τρόπος για να βρίσκουμε τα βάρη λ_i ώστε να αποδίδουν τη μεταβλητότητα των περιεκτικοτήτων στο χώρο. Κατά τον ίδιο τρόπο με τη διόρθωση του Krige ο εκτιμητής αυτός ζυγίζει ένα δείγμα σύμφωνα με τη θέση του σε σχέση με το τμήμα που εκτιμάται. Ακόμα, το kriging δίνει τα βάρη κατά τέτοιο τρόπο που να είναι μαθηματικά ο βέλτιστος. Τέλος, το kriging μας επιτρέπει να αποδώσουμε το μέσο σφάλμα που προέκυψε στην εκτίμηση ενός τμήματος ορισμένης γεωμετρίας σε ένα δοσμένο κοίτασμα, χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη διάταξη δειγμάτων.

Το kriging είναι μια στατιστική μέθοδος, δηλαδή στηρίζεται στις ιδέες της θεωρίας πιθανοτήτων. Πολύ σύντομα θα εξετάσουμε κάποια στοιχεία βασικής στατιστικής και πιθανοτήτων, και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην εισαγωγή της ιδέας των *χωρομεταβλητών*. Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του υπολογισμού και της μοντελοποίησης βαριογραμμάτων. Εφόσον εξετάσουμε μερικές πολύ πρακτικές (μη εκτιμητικές) χρήσεις των βαριογραμμάτων, θα επιστρέψουμε τελικά στην τεχνική του kriging.

Πρακτική Συστηματικής Εκτίμησης Αποθεμάτων

Οι στόχοι μας στην εκτίμηση πόρων δεν σταματούν στη ‘λήψη της βέλτιστης εκτίμησης’ από μια στατιστική ή αριθμητική άποψη, παρόλο που ο στόχος αυτός είναι σημαντικός. Είναι βασικό να τυποποιήσουμε τη διαδικασία εκτίμησης, να αποδώσουμε τις ευθύνες σωστά, να τεκμηριώσουμε την εκτίμηση επαρκώς και να λάβουμε στον απαραίτητο βαθμό υπόψη τη γεωλογία.

Τυποποίηση Διαδικασιών Εκτίμησης

Ο υπολογισμός μιας εκτίμησης είναι μια διαδικασία, όχι ένα μεμονωμένο γεγονός. Η εκτίμηση είναι μια δυναμική σειρά από βήματα και μπορεί να θελήσουμε να επαναλάβουμε κάποια από αυτά, ή να ενσωματώσουμε νέες παρατηρήσεις. Για να κάνουμε τη διαδικασία της επανεξέτασης των εκτιμήσεων μας ευκολότερη, απαιτείται τυποποίηση. Μια καλή εκτίμηση αποθεμάτων χρειάζεται να είναι επαρκώς τεκμηριωμένη ώστε να μπορεί να επαναληφθεί. Φυσικά, μια σωστά τεκμηριωμένη διαδικασία επιτρέπει επίσης επαρκή εξέταση των αποθεμάτων και ευκολότερη μεταφορά με τις αλλαγές προσωπικού.

Η διαδικασία εκτίμησης πόρων αρχίζει με τη συλλογή δεδομένων, τη γεωλογική ερμηνεία και επαλήθευση. Από αυτό το αρχικό στάδιο, η διαδικασία που χρησιμοποιείται θα πρέπει να τεκμηριώνεται και να τυποποιείται:

Βήμα		***Έλεγχος/Δοκιμή***
Βήμα 1	Συλλογή δειγμάτων	Έλεγχος αντιπροσώπευσης...
Βήμα 2	Ανάλυση	Έλεγχος Ποιότητας
Βήμα 3	Όδευση Γεώτρησης	Έλεγχος Ποιότητας
Κλπ...		

Στα προγράμματα κύριας οριοθέτησης των πόρων, τα πρότυπα, οι διαδικασίες ελέγχου κλπ. πρέπει να πραγματοποιούνται και να τεκμηριώνονται από τα πρώτα στάδια ενός έργου. Μια ανασκόπηση του ποιοτικού ελέγχου στα γεωχημικά δειγματοληπτικά προγράμματα δίνεται από τον Thompson (1984). Το καλύτερο σημείο για να ξεκινήσει κανείς τη θεώρηση των δειγματοληπτικών πρακτικών είναι ο Gy (1979) και ο Pitard (1990). Η τυποποίηση και τεκμηρίωση πρέπει να γίνονται για κάθε βήμα της λήψης δεδομένων και της διαδικασίας εκτίμησης αποθεμάτων.

Απόδοση Ευθυνών

Σε κάθε βήμα, οι ευθύνες πρέπει να είναι ξεκάθαρες: ποιος τοποθετεί τις γεωτρήσεις; ποιος παρακολουθεί τον ποιοτικό έλεγχο των αναλύσεων; κλπ. Η εκτίμηση ξεκινά με τη συλλογή δεδομένων, την επαλήθευση τους και την ιδιαίτερα σημαντική εξέταση του γεωλογικού μοντέλου. Εάν υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί στην εξόρυξη που πρέπει να ληφθούν υπόψη νωρίς στη διαδικασία, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας μηχανικός μεταλλείων.

Η εμπειρία δείχνει ότι οι ομαδικές προσπάθειες είναι γενικά ανώτερες των ατομικών. Πολλοί άνθρωποι, ειδικά με διαφορετικές ειδικότητες, τείνουν να δημιουργούν ένα εποικοδομητικό περιβάλλον που οδηγεί σε πιο αντικειμενική λήψη αποφάσεων.

Τεκμηρίωση Απόφασης - Προσεκτικά Βήματα

Η εκτίμηση των ορυκτών πόρων περιλαμβάνει πολλά βήματα λήψης αποφάσεων. Ένας γεωλόγος ή μηχανικός ορυχείων όταν ξανακοιτάει μια εκτίμηση θα πρέπει εύκολα να μπορεί να απαντήσει στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Ποιες γεωτρήσεις χρησιμοποιήθηκαν στην εκτίμηση;
- Εάν κάποιες γεωτρήσεις δεν χρησιμοποιήθηκαν, γιατί;
- Ποιες είναι οι αιτιολογήσεις των κύριων χαρακτηριστικών της γεωλογικής ερμηνείας; Γιατί χρησιμοποιήθηκε το συγκεκριμένο μοντέλο; Υπάρχουν πιθανά εναλλακτικά μοντέλα;
- Εάν οι πληθυσμοί χωρίστηκαν (π.χ. οξείδια και σουλφίδια ή βόρεια και νότια πλευρά), γιατί; Εάν συνδυάστηκαν διαφορετικές λιθολογίες στην εκτίμηση, γιατί;
- Εάν αντιμετωπίσθηκαν κατά τον ίδιο τρόπο διαφορετικές τεχνικές δειγματοληψίας (πχ. RC και DDH), πως δικαιολογείται αυτό; Εάν όχι, πως αυτές οι διαφορές αποδόθηκαν ποσοτικά και ελήφθησαν υπόψη;
- Χρησιμοποιήθηκαν επαναλαμβανόμενες αναλύσεις, και εάν ναι πως;
- Εάν κάποιες περιεκτικότητες αποκλείστηκαν, πως και γιατί;
- Εάν επιλέχθηκε κάποια συγκεκριμένη μεθοδολογία εκτίμησης, γιατί; κλπ.

Για κάθε κοίτασμα αυτές οι ιδιαιτερότητες θα είναι διαφορετικές, αλλά το γενικό σκεπτικό θα παραμένει το ίδιο.

Γεωλογικά Μοντέλα

Σημειώστε ότι *όλες* οι γεωλογικές ερμηνείες αποτελούν μοντέλα, είτε αυτό γίνεται συνειδητά είτε όχι. Το είδος του μοντέλου που χρησιμοποιείται στη εκτίμηση θα εξαρτάται περισσότερο, γενικά, από τα μεγάλης κλίμακας χαρακτηριστικά που επηρεάζουν την κατανομή της μεταλλοφορίας στο χώρο. Τα γενετικά γεωλογικά μοντέλα και τα ερευνητικά θα είναι συχνά ένα υπερσύνολο του μοντέλου που απαιτείται για την εκτίμηση των πόρων.

Τα σημαντικά χαρακτηριστικά του γεωλογικού μοντέλου που χρησιμοποιείται στην εκτίμηση σχετίζονται με τη γεωμετρία: οι στρωματογραφικές επαφές, η πτύχωση, η θέση των ρηγμάτων και ασυνεχειών, η αναγνώριση του προσανατολισμού των φλεβών κλπ. Η γνώση της γενετικής σύνδεσης μεταξύ αναλύσεων στοιχείων (Au και As για παράδειγμα, ή Pb και Ag) μπορεί να είναι ένα χρήσιμο μέρος του μοντέλου. Το γεωλογικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε πρέπει να είναι αντικειμενικό.

Ενημέρωση και Ανανέωση Μοντέλων Εκτίμησης

Καθώς γίνονται διαθέσιμες περισσότερες γεωλογικές ή δειγματοληπτικές πληροφορίες, είναι συχνά απαραίτητο να ενημερώνουμε και να ανανεώνουμε την εκτίμηση μας. Έτσι μπορεί να είναι δυνατό να βελτιώσουμε τον αλγόριθμο εκτίμησης ή τον τρόπο με τον οποίο περιλαμβάνουμε τα γεωλογικά στοιχεία στο μοντέλο μας. Τα πιθανά οικονομικά οφέλη (δηλαδή αυξημένα κέρδη) που μπορεί να προκληθούν από τη βέλτιστη εκτίμηση μπορεί να είναι σημαντικά. Η επιμονή σε μια διαδικασία εκτίμησης που δεν αποδίδει καλά, ή απλά η εφαρμογή πρόχειρων παραγόντων ως διορθωτική λύση θα στοιχίσει μάλλον στο ορυχείο, δηλαδή θα οδηγήσει σε χαμένα κέρδη. Κατά τη διάρκεια της ζωής ενός ορυχείου μπορεί να χρησιμοποιηθούν πολλές διαδικασίες εκτίμησης με στόχο τη συνεχή βελτίωση.

Οι Τυφλές Προσεγγίσεις

Ο κύριος σκοπός της τυποποίησης και της επανάληψης είναι η αποφυγή των τυφλών προσεγγίσεων γνωστών και ως 'μαύρα κουτιά' (black box). Μια προσέγγιση 'μαύρου κουτιού' είναι αυτή στην οποία οι αναλύσεις διοχετεύονται μέσα σε μια υπολογιστική διαδικασία εκτίμησης την οποία κανένας από τους συμμετέχοντες δεν κατανοεί πραγματικά. Κλασσικές απαντήσεις στην ερώτηση 'γιατί κάνεις την εκτίμηση έτσι ή αλλιώς;' από ανθρώπους που χρησιμοποιούν προσεγγίσεις 'μαύρων κουτιών' είναι:

- Έτσι έγινε και στη μελέτη σκοπιμότητας και έχουμε πλέον δεσμευτεί.
- Είναι τακτική από το κεντρικό γραφείο να ακολουθείται αυτή η διαδικασία σε όλα τα κοιτάσματα.
- Αυτή είναι η μοναδική τεχνική που μπορεί να εκτελέσει το λογισμικό μας.

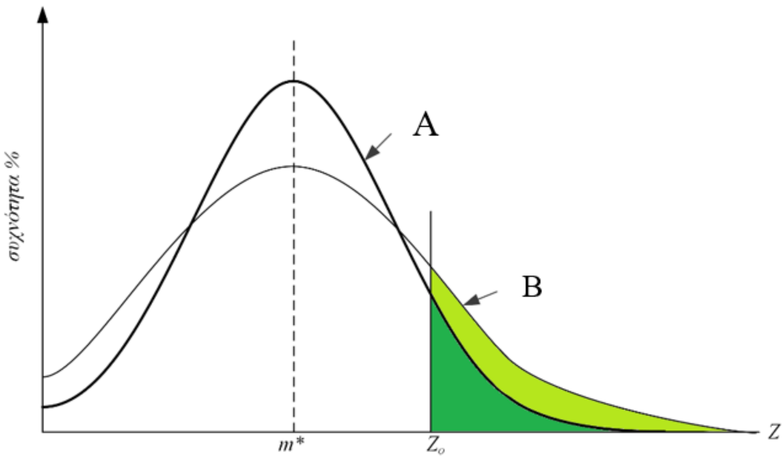
- Το σύστημα εγκαταστάθηκε από τον τάδε και δεν είμαστε σίγουροι πως να το αλλάξουμε.

Πηγές Προβλημάτων

Οι τρεις κυριότεροι λόγοι για σοβαρά λάθη στη εκτίμηση αποθεμάτων είναι:
Μη ελεγμένα δεδομένα. Τερατώδη λάθη μπορούν να υπάρχουν μέσα σε βάσεις δεδομένων για χρόνια χωρίς να είναι προφανή. Απλά σφάλματα πληκτρολόγησης ή μετατοπίσεις συντεταγμένων μπορούν να οδηγούν σε σοβαρά λανθασμένες εκτιμήσεις. Η νούμερο ένα προτεραιότητα όταν θέτουμε μια διαδικασία εκτίμησης είναι να εγκαταστήσουμε συστήματα ελέγχου δεδομένων και ποιότητας βάσης δεδομένων. Διαφορετικές εκδόσεις της ίδιας βάσης δεδομένων συνυπάρχουν σε μερικά ορυχεία. Η εγκυρότητα της βάσης δεδομένων μπορεί εύκολα να διατηρηθεί εφόσον αρχικά επαληθευθεί.
Φτωχή γεωλογική κατανόηση ή έλεγχος. Ένα φτωχό γεωλογικό μοντέλο (δηλαδή ένα μοντέλο που δεν επιτρέπει επαρκή χαρακτηρισμό της γεωμετρίας) είναι ένα προφανές παράδειγμα μιας πιθανής αιτίας καταστροφής. Και πάλι, θα πρέπει να τονισθεί ότι η λεπτομέρεια του μοντέλου πρέπει να στοχεύει στο χαρακτηρισμό της κατανομής της μεταλλοφορίας σε κλίμακες με μεταλλευτική σημασία. Είναι επίσης ξεκάθαρο ότι η αποτυχία στην έξυπνη χρήση ενός τέτοιου μοντέλου μπορεί να προκαλέσει σοβαρά προβλήματα: είναι συχνό φαινόμενο μπλοκ μεταλλεύματος να εκτιμώνται αρκετά μακριά από τα ενδεικτικά όρια μεταλλοφορίας (ή ακόμα και μέσα στον ατμοσφαιρικό αέρα ...).
Κρίσιμα λάθη στην παρεμβολή. Για παράδειγμα, η χρήση μιας παρεμβολής η οποία υποθέτει ένα μεγάλο βαθμό χωρικού συσχετισμού όταν τα δεδομένα δεν το επιβεβαιώνουν, ή κάποια άλλη λανθασμένη προδιαγραφή του μοντέλου της μεταβλητότητας της περιεκτικότητας.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

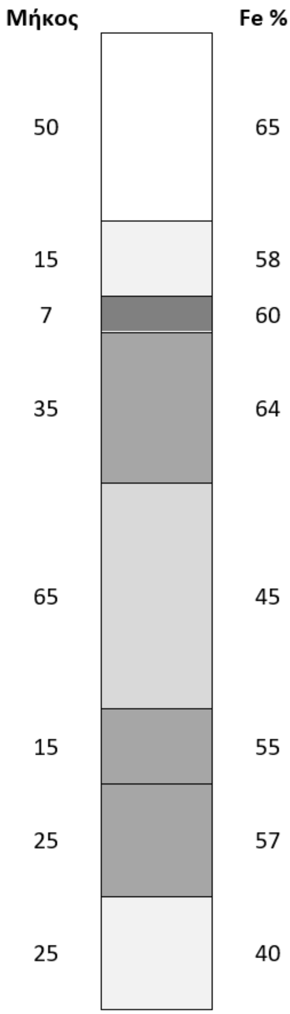
1. Τι είναι η στήριξη μιας δειγματοληπτικής μονάδας ή μιας μονάδας εξόρυξης; Τι ξέρετε για το φαινόμενο στήριξης και πως αυτό αποδίδεται σχηματικά;
2. Τι καθορίζει η Επιλεκτική Μονάδα Εξόρυξης;
3. Τι ξέρετε για την επιρροή των πληροφοριών στο διαχωρισμό μεταλλεύματος-στείρων;
4. Από ποιους παράγοντες εξαρτάται η ποιότητα των εκτιμήσεων αποθεμάτων;
5. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ιστογράμματα μιας παραμέτρου ορισμένης σε διαφορετικές στηρίξεις (Α & Β). Ποιο ιστόγραμμα αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη στήριξη και ποιο στη μικρότερη; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.



6. Υπολογίστε σημείο εκτίμησης (Χ) το οποίο βρίσκεται σε αποστάσεις *d* από τα γειτονικά του δείγματα με τιμές *z* με τη μέθοδο αντιστρόφου αποστάσεως στο τετράγωνο.

Δείγμα	Απόσταση δείγματος (d)	Τιμή δείγματος (z)
1	15	40
2	6	42
3	12	61
4	5	55
5	9	46

9. Εξετάζεται η κατανομή εκτιμήσεων μπλοκ 5x5x5 μ. και η κατανομή εκτιμήσεων μπλοκ 10x10x10μ. από ένα κοίτασμα. Ποια κατανομή θα παρουσιάζει μεγαλύτερη διακύμανση και γιατί;
10. Να γίνει η αξιολόγηση των δειγμάτων της παρακάτω γεώτρησης σε σταθερό μήκος 100cm:



Συνολικό Μήκος 237cm

2. ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γεωστατιστική και Στατιστική

Η Γεωστατιστική είναι κλάδος της Εφαρμοσμένης Στατιστικής που ασχολείται με φαινόμενα που κυμαίνονται στο χώρο (Olea, 1991). Έτσι στηρίζεται στη βάση της θεωρίας πιθανοτήτων και τη στατιστική. Ως αποτέλεσμα, υπάρχει αναπόφευκτα κάποιο υλικό που πρέπει να γίνει κατανοητό πριν προχωρήσουμε σε αυτή καθεαυτή τη γεωστατιστική.

Ένας από τους στόχους αυτού του κεφαλαίου είναι να καλύψει την απαραίτητη ορολογία και να βοηθήσει στην κατανόηση κάποιων βασικών στοιχείων πιθανοτήτων και στατιστικής που χρειάζονται στη συνέχεια του βιβλίου. Το κεφάλαιο αυτό επίσης στοχεύει στο να φρεσκάρει τη στατιστική που γνωρίζετε και να σας δώσει κάποια χρήσιμα εργαλεία για να εξετάζετε τα δεδομένα. Το υλικό που δίνεται έχει αρκετή λεπτομέρεια και μπορείτε να ανατρέξετε σε αυτό ακόμα και αργότερα όταν διαβάζετε τα άλλα κεφάλαια.

Στοιχεία Πιθανοτήτων

Χώρος

Ο *χώρος* είναι η συνολική μάζα ή ο όγκος του υλικού που μας ενδιαφέρει ως πηγή δεδομένων. Στη μεταλλευτική γεωστατιστική αυτό είναι το κοίτασμα που μας ενδιαφέρει, αν και θα μπορούσε να είναι μια ζώνη ενός κοιτάσματος ή μια ομάδα κοιτασμάτων. Σε άλλες εφαρμογές θα μπορούσε να είναι ένας στρωματογραφικός ορίζοντας, ένας ερευνητικός χώρος, κλπ. Έτσι μπορεί να έχει καθαρά και ακριβή όρια ή να είναι ασαφής (όπως τα όρια μιας λίγο γνωστής μεταλλοφορίας).

Πληθυσμός

Ο *πληθυσμός* είναι το σύνολο όλων των πιθανών στοιχείων που μπορούμε να πάρουμε από ένα ορισμένο χώρο. Έτσι, ο ορισμός ενός δοσμένου πληθυσμού είναι στενά συνδεμένος με τις προδιαγραφές της μονάδας δειγματοληψίας. Για παράδειγμα, εάν ο χώρος μας είναι ένα συγκεκριμένο κοίτασμα χρυσού, τότε οι παρακάτω πληθυσμοί μπορεί να μας ενδιαφέρουν:

- Η ομάδα: ‘όλα τα πιθανά δείγματα RC 1 m στο κοίτασμα’.
- Η ομάδα: ‘όλα τα πιθανά τμήματα 25 x 10 x 5 m στο κοίτασμα’.
- Η ομάδα: ‘όλα τα πιθανά μπλοκ επιλεκτικής εξόρυξης 5 x 5 x 5 m στο κοίτασμα’.

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε πολλούς πληθυσμούς από ένα δοσμένο χώρο. Είναι σημαντικό να ορίσουμε και το σύνολο και τον πληθυσμό που εξετάζουμε σε οποιαδήποτε στατιστική ή γεωστατιστική μελέτη. Αν και αυτό μπορεί να φαίνεται προφανές, δεν είναι σπάνιο το να δει κανείς αναφορές που κάνουν λόγο για 'δείγματα' χωρίς να καθορίζουν ποια είναι αυτά.

Μονάδα Δειγματοληψίας

Κάθε ξεχωριστή μέτρηση ή παρατήρηση ενός δοσμένου πληθυσμού είναι μια μονάδα δειγματοληψίας. Για παράδειγμα: ½ δείγματα πυρήνα, ¼ δείγματα πυρήνα, δείγματα RC, δείγματα από διατρήσεις εκρηκτικών, κλπ. Και πάλι είναι βασικό να οριστούν προσεκτικά και τεκμηριωμένα οι μονάδες δειγματοληψίας.

Στήριξη

Μια από τις σημαντικότερες ιδέες τις γεωστατιστικής είναι αυτή της *στήριξης*. Η στήριξη ενός δείγματος ορίζεται από το μέγεθος, το σχήμα και τον προσανατολισμό του. Σε αντίθεση με την κλασική στατιστική, όπου υπάρχει μια 'φυσική μονάδα δειγματοληψίας' (ένα άτομο, ένα δέντρο, μια λάμπα ...) υπάρχουν πολλές πιθανές στηρίξεις δειγμάτων σε προβλήματα που αφορούν δειγματοληψία για χημική ανάλυση, κλπ. Έτσι η στήριξη είναι πολύ σημαντική, γιατί μερικά στατιστικά (ειδικά η διακύμανση) είναι στενά συνδεμένα με τη στήριξη που επιλέγεται. Παραδείγματα ορισμού στήριξης είναι:

- Ένα κάθετο δείγμα μήκους 1.4m ½ HQ πυρήνα τριπλού σωλήνα.
- Ένα κάθετο δείγμα μήκους 2m ½ HQ πυρήνα τριπλού σωλήνα.
- Ένα δείγμα μήκους 2m, 5kg οριζόντιου καναλιού κατά μήκος ενός μετώπου.

Στοιχεία Πιθανοτήτων

Υπάρχει μεγάλος όγκος βιβλιογραφίας για την άλγεβρα των πιθανοτήτων, ένα μικρό μέρος της οποίας είναι απαραίτητο για τη βασική γεωστατιστική. Μια καλή εισαγωγή στις ιδέες τις στατιστικής και των πιθανοτήτων δίνεται από τον Davis (1986). Μόνο βασικά στοιχεία χρειάζονται στο μάθημα αυτό, τα οποία μάλλον είναι απαραίτητα γενικά σε εφαρμογές της μεταλλευτικής και θα τα εξετάσουμε παρακάτω.

Γεγονότα και Ομάδες

Ένα 'γεγονός' είναι μια συλλογή από δειγματοληπτικά σημεία που ορίζουν ένα αποτέλεσμα στο οποίο θα πρέπει να δώσουμε μια πιθανότητα. Τα γεγονότα μπορούν να μετασχηματιστούν ή να συνδυαστούν, και μπορούν να αποδοθούν ως ομάδες. Ο συμβολισμός και η άλγεβρα των συνόλων επομένως χρησιμοποιείται και στη θεωρία πιθανοτήτων, και δίνεται περιληπτικά στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1: Συμβολισμός Συνόλων	
Συμβολισμός	Ερμηνεία
$a \in A, a \notin A$	*Το α* είναι [δεν είναι] στοιχεία του *Α*
S,Ω,U	Ο χώρος, ο δειγματοληπτικός χώρος
Α=Ω	Το *Α* είναι βέβαιο
$\varnothing$	Κενό σύνολο (χωρίς στοιχεία)
$A=\varnothing$	Το *Α* είναι αδύνατο
$A \subset B, A \subseteq B$	Το *Α* είναι υποσύνολο του *Β*
Α=Β	Το *Α* ισούται του *Β*
$A \cup B$	Η ένωση των *Α* και *Β*
$A \cap B$	Η τομή των *Α* και *Β*
$A^{'}, \overline{A}, A^{C}$	Το συμπληρωματικό του *Α,* το μη *Α*
$A \cap B = \varnothing$	Τα *Α* και *Β* δεν έχουν κοινά στοιχεία

Πιθανότητα

Σε κάθε γεγονός Α μπορούμε να δώσουμε έναν αριθμό Pr(A) που λέγεται 'πιθανότητα του γεγονότος Α'. Οι πιθανότητες μετρούν το κατά πόσο δύναται να συμβεί μια περίπτωση ή ένα γεγονός. Για παράδειγμα, το γεγονός μπορεί να είναι 'η μέση τιμή του υλικού σε μια απόθεση είναι μεγαλύτερη από 1.5 g/t Au'. Η κλίμακα των πιθανοτήτων είναι από 0 (το γεγονός είναι αδύνατο) έως 1 (το γεγονός είναι βέβαιο), δηλαδή:

$$0 \leq \Pr(A) \leq 1$$ **Εξίσωση 2-1**

Επειδή Pr(Ω) = 1 και Pr(ø) = 0 η πιθανότητα του συμπληρωματικού ενός γεγονότος, δηλαδή ότι το γεγονός δεν πρόκειται να συμβεί, είναι:

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$ **Εξίσωση 2-2**

Κανόνας Άθροισης και Αμοιβαία Αποκλειστικότητα

Η πιθανότητα να συμβεί το ένα ή το άλλο από δύο αμοιβαία αποκλειστικά γεγονότα *Α* και *Β* είναι το άθροισμα της πιθανότητας να συμβεί το *Α* και της πιθανότητας να συμβεί το *Β*. Αυτό μπορεί να γενικευτεί για οποιοδήποτε αριθμό αμοιβαία αποκλειστικών γεγονότων, δηλαδή:

$$\Pr(A \cup B \cup C \ldots) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) + \ldots$$ **Εξίσωση 2-3**

Εάν τα γεγονότα δεν είναι αμοιβαία αποκλειστικά, ο κανόνας άθροισης δεν ισχύει, και στην περίπτωση των γεγονότων *Α* και *Β* που αναφέραμε παραπάνω:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$ **Εξίσωση 2-4**

όπου $\Pr(A \cap B)$ είναι η πιθανότητα της *τομής* των δύο γεγονότων *A* και *B,* δηλαδή τα *A* και *B* συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Κανόνας Πολλαπλασιασμού και Ανεξαρτησία

Μια βασική ιδέα της πιθανότητας είναι αυτή της ανεξαρτησίας. Δυο γεγονότα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα εάν η πιθανότητα να συμβούν και τα δύο είναι το προϊόν των αντίστοιχων πιθανοτήτων τους, δηλαδή

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B) \Rightarrow A, B \text{ ανεξάρτητα}$$ **Εξίσωση 2-5**

Το γεγονός 'το *A* και το *B* συμβαίνουν' ονομάζεται *σύνθετο* γεγονός και συμβολίζεται επίσης:

$$\Pr(AB) = \Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$$ **Εξίσωση 2-6**

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε πιθανότητες σύνθετων γεγονότων καθορίζεται από το κατά πόσο τα γεγονότα μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα ή εξαρτημένα. Το κλασικό παράδειγμα είναι το διαδοχικό ρίξιμο του κέρματος: πετάμε ένα κέρμα δυο φορές και η πιθανότητα του αποτελέσματος Κεφάλι, Κεφάλι είναι:

Pr(Κεφάλι) x Pr(Κεφάλι) = ½ x ½ = ¼ **Εξίσωση 2-7**

Η βασική ιδέα της ανεξαρτησίας δυο γεγονότων *A* και *B* είναι ότι η γνώση 'το *A* έχει συμβεί' δεν δίνει καμιά πληροφορία για το γεγονός *B*. Συχνά υποθέτεται στη στατιστική, για παράδειγμα, ότι η μέτρηση των σφαλμάτων είναι ανεξάρτητη.

Πιθανότητα υπό Συνθήκη

Εάν *A* και *B* είναι δυο γεγονότα, η πιθανότητα να συμβεί το *B* εάν έχει ήδη συμβεί το *A* συμβολίζεται:

$$\Pr(B|A)$$ **Εξίσωση 2-8**

και ονομάζεται 'υπό συνθήκη πιθανότητα του *B* δεδομένου του *A*'. Η ιδέα της υπό συνθήκη πιθανότητας είναι στενά συνδεμένη με αυτήν της ανεξαρτησίας. Εάν η πραγματοποίηση ή μη πραγματοποίηση του *A* δεν μας βοηθά να κάνουμε δηλώσεις για το *B* τότε, όπως έχουμε ήδη πει, μπορούμε να πούμε ότι 'τα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα γεγονότα'. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την υπό συνθήκη πιθανότητα:

$$\Pr(B|A) = \Pr(B)$$ για *A,B* ανεξάρτητα **Εξίσωση 2-9**

Εάν η πραγματοποίηση ή μη πραγματοποίηση του *A* μας βοηθά να κάνουμε δηλώσεις για το *B* τότε λέμε ότι τα '*A* και *B* είναι εξαρτημένα γεγονότα'. Στη περίπτωση αυτή μπορούμε ακόμα να δώσουμε μια τιμή στην υπό συνθήκη πιθανότητα. Η υπό συνθήκη πιθανότητα έχει σπουδαίο ρόλο στη στατιστική και γεωστατιστική της εκτίμησης αποθεμάτων.

Παραδείγματα υπό συνθήκη πιθανότητας σε μεταλλευτικές εφαρμογές μπορεί να σχετίζονται με όρια εκμεταλλευσιμότητας. Για παράδειγμα:

- 'η πιθανότητα το σφάλμα εκτίμησης για ένα μπλοκ είναι ±1% *(B)* δεδομένου ότι εξετάζουμε ένα μπλοκ το οποίο έχει εκτίμηση περιεκτικότητας μεγαλύτερη από 2.5% Cu *(A)*.'
- 'η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα μπλοκ που έχει πραγματική περιεκτικότητα κάτω από 1.2 g/t Au ως μετάλλευμα *(B)* δεδομένου ότι επιλέγουμε ένα μπλοκ το οποίο έχει εκτίμηση περιεκτικότητας μεγαλύτερη ή ίση με 1.2 g/t Au *(A)*.'

Όπως μόλις είπαμε, ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε πιθανότητες σύνθετων γεγονότων καθορίζεται από το εάν τα γεγονότα μπορούν να θεωρηθούν ως ανεξάρτητα ή εξαρτημένα. Ειδικότερα:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(AB) = \Pr(A) \times \Pr(B)$$ για *A,B* ανεξάρτητα **Εξίσωση 2-10**

και

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(AB) = \Pr(A) \times \Pr(B|A)$$ για *A,B* εξαρτημένα. **Εξίσωση 2-11**

Τυχαίες Μεταβλητές και Κατανομές

Η ιδέα μιας τυχαίας μεταβλητής είναι κεντρική και στη στατιστική αλλά και στη γεωστατιστική.

Τυχαίες Μεταβλητές

Μια *τυχαία μεταβλητή* (ΤΜ), την οποία συνήθως συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα *X*, είναι μια μεταβλητή που παίρνει αριθμητικές τιμές, που συνήθως συμβολίζονται από μικρά γράμματα: {$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$}, σύμφωνα με το αποτέλεσμα ενός πειράματος στο οποίο έχουμε αποδώσει σχετικές πιθανότητες. Πιο αυστηρά, μια τυχαία μεταβλητή είναι μια *συνάρτηση* της οποία το πεδίο ορισμού είναι ένας δειγματοληπτικός χώρος και της οποίας το εύρος είναι ένα σύνολο πραγματικών αριθμών.

Για παράδειγμα, εάν το πείραμα είναι το ρίξιμο ενός κέρματος μπορούμε να δώσουμε το βαθμό 1 στο αποτέλεσμα 'Κεφάλι' και το 0 στο αποτέλεσμα 'Γράμματα'. Τότε έχουμε μια τυχαία μεταβλητή *X* που παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$X = \begin{cases} 0 \text{ με πιθανότητα } ½ \\ 1 \text{ με πιθανότητα } ½ \end{cases}$$

Έτσι, μια τυχαία μεταβλητή είναι απλά μια συνάρτηση που παίρνει συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές με δοσμένες πιθανότητες.

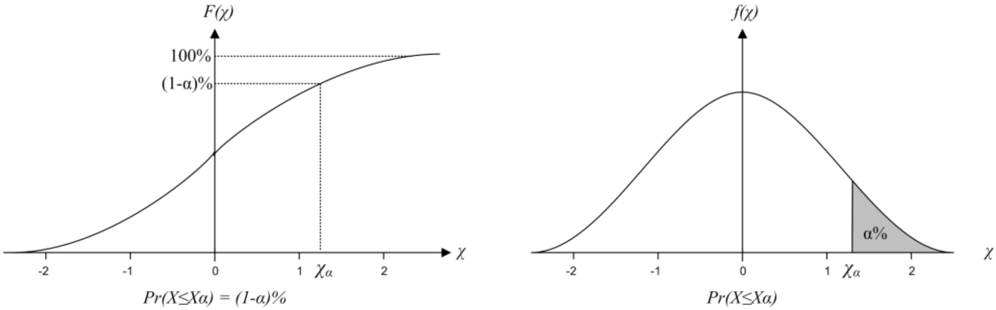
Η ΤΜ *X* μπορεί να πάρει τιμές (που επίσης αναφέρονται και ως *πραγματοποιήσεις*) που είναι μέλη πιθανών συνόλων τιμών $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,\}$. Η λέξη *τυχαία* σε αυτήν την περίπτωση δεν προτείνει ότι οι αριθμητικές τιμές που παίρνει η ΤΜ είναι τυχαία κατανεμημένες. Αυτό που υπονοείται είναι ότι η ΤΜ υποθέτει συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές με μια συγκεκριμένη πιθανότητα και ότι η πιθανότητα αυτή μπορεί να εκτιμηθεί από μια κατανομή συχνότητας κατασκευασμένη από επαρκώς μεγάλα *τυχαία* δείγματα αποτελεσμάτων.

Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής

Κάθε τυχαία μεταβλητή *X* ορίζεται από τη *συνάρτηση αθροιστικής κατανομής:*

$$F(x) = \Pr[X \leq x] \quad -\infty < x < \infty$$ **Εξίσωση 2-12**

Αυτή είναι η πιθανότητα η *X* να είναι μικρότερη ή ίση σε κάποια τιμή *x*. Η συνάρτηση *F(x)* αυξάνεται μονοτονικά από το 0 στο 1 (Σχήμα 2.1α).



α β

Σχήμα 2.1: Συναρτήσεις αθροιστικής κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας.

Εάν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα στην οποία βρίσκεται η *X* σε ένα δοσμένο διάστημα (*a,b*), έχουμε:

$$\Pr[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$ **Εξίσωση 2-13**

Εάν το διάστημα (*a,b*) είναι πολύ μικρό, ας πούμε:

$$b-a=dx$$ **Εξίσωση 2-14**

τότε η πιθανότητα η *X* να βρίσκεται μέσα στο διάστημα:

$$(x-\frac{dx}{2},x+\frac{dx}{2})$$

μπορεί να γραφεί ως:

$$\Pr\left[x-\frac{dx}{2}<X\le x+\frac{dx}{2}\right]=F\left(x+\frac{dx}{2}\right)-F\left(x-\frac{dx}{2}\right)\approx F'(x)dx \quad \textbf{Εξίσωση 2-15}$$

Δεδομένου ότι η *X* είναι μια συνεχής συνάρτηση. Μπορεί να θυμάστε από την άλγεβρα ότι η *F′(x)* είναι η παράγωγος ή η κλίση της *F(x)* στο *x* και ότι τη συμβολίζουμε με *f(x)* (Σχήμα 2.1β).

f(x) είναι η παράγωγος της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής και αναφέρεται ως η *πυκνότητα της πιθανότητας* στο σημείο *x*. Η συνάρτηση *f(x)* ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*.

Η περιοχή κάτω από την καμπύλη *f(x)* είναι η πιθανότητα και θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η τιμή *f(x)* από μόνη της δεν είναι πιθανότητα (για παράδειγμα, η τιμή της μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 1). Η σχέση μεταξύ *f(x)* και *F(x)* δίνεται στα σχήματα 2.1α και 2.1β. *F(x)* είναι η περιοχή κάτω από την καμπύλη *f(x)* έως ένα συγκεκριμένο σημείο *x*, δηλαδή

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x) \quad \textbf{Εξίσωση 2-16}$$

Ιστόγραμμα

Ο τρόπος για να εκτιμηθεί η *f(x)* είναι η κατασκευή ενός *ιστογράμματος*. Ένα ιστόγραμμα κατασκευάζεται διαιρώντας το εύρος των τιμών (δηλαδή το διάστημα μεταξύ της μικρότερης και μεγαλύτερης μετρημένης τιμής) σε έναν αριθμό κλάσεων. Στη συνέχεια μετρούμε τον αριθμό μετρήσεων σε κάθε κλάση. Το αποτέλεσμα σε κάθε κλάση είναι ένας ακέραιος ο οποίος διαιρούμενος από το συνολικό αριθμό μετρήσεων μας δίνει ένα *σχετικό ιστόγραμμα συχνοτήτων*.

Πόσες Κλάσεις;

Η επόμενη προφανής ερώτηση είναι: ‘πόσες κλάσεις θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στο ιστόγραμμα μας’; Πρόκειται για ένα σημαντικό ερώτημα διότι εάν οι κλάσεις έχουν μεγάλο εύρος, πληροφορίες σχετικές με τη συνάρτηση πυκνότητας που εκτιμάμε χάνονται εξαιτίας της εξομάλυνσης του ιστογράμματος. Αντίθετα, εάν ορίσουμε κλάσεις που είναι πολύ στενές, μπορεί να πάρουμε πολύ λίγες (ή καθόλου) μετρήσεις μέσα σε κάποιες από αυτές. Αυτό θα οδηγήσει σε μια εκτίμηση του ιστογράμματος που είναι αρκετά ευαίσθητη στην *ακριβή* θέση των ορίων των κλάσεων και έτσι η μεταβλητότητα της εκτίμησης πυκνότητας θα είναι πολύ υψηλή.

Ένας εμπειρικός κανόνας είναι να μην ορίζουμε κλάσεις κατά τρόπο ώστε να βρίσκονται λιγότερες από πέντε μετρήσεις σε κάθε κλάση. Εάν έχουμε μεγάλο αριθμό μετρήσεων δεν θα πρέπει να δυσκολευτούμε στο σχετικά καλό ορισμό του σχήματος του ιστογράμματος. Σπάνια χρειάζονται περισσότερες από είκοσι κλάσεις εκτός εάν η κατανομή είναι ιδιαίτερα ακανόνιστη, δηλαδή υπάρχουν μερικά δείγματα που βρίσκονται μακριά από την πλειονότητα των δεδομένων.

Ροπές και Αναμενόμενη Τιμή

Η ενότητα αυτή είναι σημαντική γιατί η θεωρητική βάση της γεωστατιστικής απαιτεί την κατανόηση των παρακάτω στοιχείων.

Αναμενόμενη Τιμή

Η *αναμενόμενη τιμή* ή *μαθηματική προσδοκία E(X)* μιας τυχαίας μεταβλητής *X* λαμβάνεται βρίσκοντας τη μέση τιμή της συνάρτησης για όλες τις πιθανές τιμές της μεταβλητής. Το σύμβολο *E* συμβολίζει τη λειτουργία του υπολογισμού της αναμενόμενης τιμής.

Η *αναμενόμενη τιμή* είναι λοιπόν μια ιδανική ή θεωρητική μέση τιμή. Στην πραγματικότητα είναι το όριο του μέσου των δειγμάτων όταν το μέγεθος τους αυξάνει στο άπειρο. Έτσι οι όροι *αναμενόμενη τιμή* και *μέσος* είναι ισοδύναμοι. Σημειώστε ότι δεν περιμένουμε τα δείγματα που λαμβάνουμε από μια κατανομή να έχουν απαραίτητα μέση τιμή ίση με την αναμενόμενη εκτός εάν το δείγμα μας είναι μεγάλο.

Επίσης σημειώστε ότι σε μερικές περιπτώσεις η τιμή ενός δοσμένου αποτελέσματος της *X* (δηλαδή *x*) δεν μπορεί να πάρει την τιμή της προσδοκίας. Για παράδειγμα, εάν ορίσουμε το ‘Κεφάλι’ ως 1 και τα ‘Γράμματα’ ως 0, για ένα σωστό κέρμα η αναμενόμενη τιμή είναι 0.5. Η λειτουργία του υπολογισμού της αναμενόμενης τιμής είναι *γραμμική*, δηλαδή:

$$\begin{aligned} &E[c] = c \\ &E[cX] = cE[X] \\ &E[X+Y] = E[X] + E[Y] \end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 2-17}$$

όπου *c* είναι μια σταθερή τιμή και *X* και *Y* είναι τυχαίες μεταβλητές.

Ροπές

Η ιδέα της ροπής μιας κατανομής είναι η βάση πολλών στατιστικών που χρησιμοποιούνται στη γεωστατιστική και σε άλλες εφαρμογές της θεωρίας πιθανοτήτων. Για τον καθορισμό της μορφής μιας συγκεκριμένης κατανομής πιθανότητας από πειραματικά δεδομένα απαιτείται η εκτίμηση των παραμέτρων της. Οι ροπές είναι χρήσιμες ως περιλήψεις τέτοιων καθορισμών.

Η ιδέα μιας ροπής μπορεί να σας είναι γνωστή από τη φυσική, και ιδιαίτερα τη μηχανική. Στη χρήση της αυτή, η ροπή μιας δύναμης μπορεί να οριστεί ως το μέγεθος της επί την απόσταση μεταξύ του σημείου εφαρμογής της και τον άξονα περιστροφής. Έτσι, δυνάμεις που εφαρμόζονται σε αποστάσεις που αυξάνουν από τον άξονα περιστροφής έχουν μεγαλύτερο περιστροφικό αποτέλεσμα – μεγαλύτερη ροπή.

Στη στατιστική μας ενδιαφέρει η κατανομή των τυχαίων μεταβλητών που είναι αριθμητικές τιμές. Μπορούμε να ορίσουμε (στατιστικές) ροπές γύρω από οποιονδήποτε επιλεγμένο άξονα δηλαδή γύρω από οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή του *X*. Η *k* ροπή του *X* συνήθως συμβολίζεται μ'_k και ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mu'_k &= E[X^k] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx \end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 2-18}$$

Έτσι η πρώτη ροπή είναι:

$$\mu'_k = E[X^k] \quad k=1$$

$$\mu'_1 = m = E[X] \qquad \textbf{Εξίσωση 2-19}$$

δηλαδή η πρώτη ροπή μιας κατανομής είναι ο μέσος *m* (ή προσδοκία).

Μέσος

Τώρα πια όλα παίρνουν τη σημασία τους, μια και ο μέσος μπορεί να θεωρηθεί ως το *κέντρο* της κατανομής. Πιο συγκεκριμένα, η προσδοκία (η πρώτη ροπή) είναι το κέντρο βάρους της κατανομής. Για το λόγο αυτό ο μέσος μερικές φορές αναφέρεται και ως μια παράμετρος θέσης της κατανομής.

Υπάρχουν και άλλα μέτρα της θέσης ή της κεντρικής τάσης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί του μέσου. Για παράδειγμα, η διάμεσος *M*, που είναι η τιμή ως προς την οποία οι μισές μετρήσεις είναι μεγαλύτερες και οι άλλες μισές μικρότερες. Παρόλα αυτά, ο μέσος είναι ιδιαίτερα ελκυστικός όταν έχουμε να κάνουμε με αθροιστικές ιδιότητες.

Μια άλλη ιδιότητα της προσδοκίας που αξίζει να σημειώσουμε είναι ότι, εάν οι *X* και *Y* είναι ανεξάρτητες ΤΜ:

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] \qquad \textbf{Εξίσωση 2-20}$$

Τώρα, μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τις ροπές γύρω από οποιοδήποτε κέντρο (ή αρχή), αν και αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως στη στατιστική είναι οι ροπές που υπολογίζονται γύρω από τον αριθμητικό μέσο.

$$E[X - \mu'_1] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu'_1\right)^k \cdot f(x)dx \qquad \textbf{Εξίσωση 2-21}$$

Κατά αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε την *k* ροπή γύρω από τον μέσο.

Διακύμανση

Τα μέτρα των κεντρικών τάσεων όπως ο μέσος και η διάμεσος είναι σημαντικά για να χαρακτηρίσουμε τα δεδομένα και τις κατανομές. Συνήθως μας ενδιαφέρει και ένα μέτρο του εύρους ή *της διασποράς* των τιμών. Και πάλι, υπάρχουν διάφορα στατιστικά που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, για παράδειγμα, το εύρος (μέγιστη – ελάχιστη τιμή). Όμως, ένα μέτρο με κέντρο τον μέσο είναι πιο λογικό στις περισσότερες περιπτώσεις.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση απόκλιση από τον αριθμητικό μέσο, αλλά υπάρχει μια δυσκολία. Εξ ορισμού, ο μέσος είναι η πρώτη ροπή της κατανομής (το κέντρο βάρους της) και ως τέτοιο το άθροισμα των θετικών αποκλίσεων είναι ίσο με το άθροισμα των αρνητικών αποκλίσεων, δηλαδή ο μέσος όρος όλων των αποκλίσεων από τον μέσο είναι ίσος με το μηδέν - όχι ιδιαίτερα χρήσιμος. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απόλυτες τιμές για να προσπεράσουμε το εμπόδιο αυτό:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} |X_i = m|}{N}$$

Εξίσωση 2-22

Αυτό το μέτρο δεν χρησιμοποιείται συχνά στη στατιστική, εν μέρει γιατί οι απόλυτες τιμές παρουσιάζουν δυσκολίες στην αριθμητική, αλλά επίσης γιατί υπάρχει ένα καλύτερο θεωρητικό μέτρο της μέσης απόκλισης από τον μέσο: η *διακύμανση*.

Η διακύμανση καταλαμβάνει μια πολύ σημαντική θέση στη στατιστική και τη γεωστατιστική. Είναι η δεύτερη ροπή γύρω από τον μέσο δηλαδή:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sigma^2 = E[X - m]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - m^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Εξίσωση 2-23

Οι συμβολισμοί *Var(X)* και σ^2 είναι ισοδύναμοι και αναφέρονται στην παράμετρο *διακύμανση* που εκτιμάται από το στατιστικό s^2:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2 \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right] - m^2 \end{aligned}$$

Εξίσωση 2-24

όπου *m* (ο αριθμητικός μέσος) εκτιμάται από τον μέσο των δειγμάτων $\overline{X}$. Μπορείτε επίσης να βρείτε τον τύπο του s^2 να διαιρείται με *(N-1)* αντί για *N*. Αυτό αντιμετωπίζει το σφάλμα όταν το *N* είναι μικρό, και δεν έχει καμιά σημασία όταν το *N* είναι μεγάλο.

Σημειώστε ότι στη γεωστατιστική ο συμβολισμός D^2 χρησιμοποιείται συχνά για τη διακύμανση (D – dispersion).

Ιδιότητες της Διακύμανσης

Οι κύριες ιδιότητες της διακύμανσης είναι:

$$\begin{aligned} &Var[c] = 0 \\ &Var[X + c] = Var[X] \\ &Var[cX] = c^2 \cdot Var[X] \\ &Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[XY] \end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 2-25}$$

όπου *c* είναι μια σταθερά, *X* και *Y* είναι τυχαίες μεταβλητές και *Cov* είναι η συνδιακύμανση την οποία θα αναλύσουμε παρακάτω.

Το ότι η διακύμανση μιας σταθεράς είναι ίση με μηδέν είναι λογικό εάν εξετάσουμε τη διακύμανση ως ένα μέτρο της διασποράς από τον μέσο. Στην περίπτωση όπου όλες οι τιμές είναι οι ίδιες, δεν υπάρχει διασπορά. Ομοίως, το ότι προσθέτοντας μια σταθερά στην ΤΜ δεν μεταβάλει τη διακύμανση δεν μας προκαλεί έκπληξη – απλά μετατοπίζουμε τις τιμές όλων των δεδομένων κατά την ίδια ποσότητα και δεν μεταβάλουμε τη διασπορά των τιμών. Πολλαπλασιάζοντας κάθε τιμή με μια σταθερά *c* μεταβάλλεται η διακύμανση κατά c^2 διότι η διακύμανση έχει τις διαστάσεις τετραγωνισμένων μονάδων.

Μέτρηση Διασποράς

Η διακύμανση είναι μια στατιστική παράμετρος που μετρά τη διασπορά. Εάν οι περισσότερες τιμές βρίσκονται κοντά στον μέσο, η διακύμανση θα είναι μικρή. Εάν οι τιμές απλώνονται σε ένα μεγάλο εύρος, η διακύμανση θα είναι μεγάλη.

Τυπική Απόκλιση

Εάν θέλουμε να μετρήσουμε τη διασπορά στις ίδιες μονάδες με τις ίδιες τις τιμές, χρησιμοποιούμε την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, ή την *τυπική απόκλιση:*

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} \qquad \textbf{Εξίσωση 2-26}$$

Επειδή η διακύμανση και η τυπική απόκλιση εκφράζονται ως προς τον μέσο, μια διακύμανση δεν μπορεί να ερμηνευτεί εάν δεν γνωρίζουμε επίσης τον μέσο. Ιδιαίτερα, δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τη διακύμανση ή την τυπική απόκλιση μιας κατανομής με μια άλλη χωρίς να λάβουμε υπόψη τους μέσους των κατανομών αυτών.

Συντελεστής Μεταβλητότητας

Μια βολική στατιστική παράμετρος που μπορούμε να υπολογίσουμε όταν συγκρίνουμε θετικές κατανομές είναι *ο συντελεστής μεταβλητότητας* (CV – coefficient of variation). Είναι γνωστός και ως σχετική τυπική απόκλιση:

$$CV = \frac{\sigma}{m}$$ **Εξίσωση 2-27**

Ο CV μπορεί να εκφραστεί και επί τοις εκατό. Εάν συγκρίνουμε δυο κατανομές, λέμε ότι αυτή με τον υψηλότερο CV είναι πιο διασπαρμένη από αυτήν με το χαμηλότερο CV. Σε εφαρμογές μεταλλευτικής η τιμή του CV μας ενδιαφέρει να υπολογιστεί νωρίς στην εκτίμηση μας γιατί μας δίνει μια προειδοποίηση για πιθανές δυσκολίες. Τιμές του CV που είναι αρκετά μεγαλύτερες από 1.0 είναι τυπικές για δείγματα περιεκτικότητας από πολλά ορυχεία ουράνιου, χρυσού ή κασσίτερου. Μερικά κοιτάσματα βασικών μετάλλων έχουν CV μεγαλύτερο από 1.0. Κοιτάσματα χρυσού έχουν CV μεγαλύτερο από 2.0. Όσο ψηλότερος ο CV τόσο πιο δύσκολη θα είναι η γεωστατιστική ανάλυση στη συνέχεια και η εκτίμηση συνολικά. Ο Πίνακας 2.2 δίνει κάποιες γενικές οδηγίες για την επιλογή της κατάλληλης εκτιμητικής μεθόδου με βάση τη γεωμετρία και τη μεταβλητότητα όπως αυτή εκφράζεται μέσω του CV (Noble, 1992).

Άλλες Ροπές

Οι άλλες δύο ροπές γύρω από τον μέσο που μπορεί να συναντήσουμε είναι οι εξής:

Λοξότητα - Ασυμμετρία

Η τρίτη ροπή γύρω από τον μέσο είναι:

$$\begin{aligned} \mu_3' &= E[X-m]^3 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-m)^3 \end{aligned}$$ **Εξίσωση 2-28**

Για μια συμμετρική κατανομή, η τρίτη ροπή ισούται με μηδέν. Μια ασύμμετρη κατανομή με ουρά στο μεγάλο μέρος του εύρους έχει μια θετική τιμή μ'_3 και λέγεται θετικά λοξή. Αντίθετα, εάν η ουρά είναι στο μικρό μέρος του εύρους, η μ'_3 θα έχει μια αρνητική τιμή, και η κατανομή λέγεται αρνητικά λοξή.

Οι γεωλογικές μεταβλητές έχουν συχνά λοξές κατανομές. Ιδιαίτερα, οι γεωχημικές μεταβλητές που μετρώνται σε ποσότητες ιχνών, όπως τα ακριβά μέταλλα και τα ιχνοστοιχεία, είναι συχνά θετικά λοξές. Η λοξότητα μετριέται συνήθως από μια αδιάστατη ποσότητα που λέγεται συντελεστής λοξότητας:

$$\sqrt{\beta_1} = \gamma_1 = \frac{\mu_3'}{[\mu_2']^{\frac{3}{2}}}$$ **Εξίσωση 2-29**

δηλαδή η τρίτη ροπή τυποποιείται χρησιμοποιώντας την τετραγωνική ρίζα της κυβικής διακύμανσης.

Πίνακας 2.2: Επιλογή μεθόδου εκτίμησης με βάση τη γεωμετρία και μεταβλητότητα του κοιτάσματος (Noble, 1992).

CV	**Χαμηλή Μεταβλητότητα** **CV < 0.25**	**Μέση Μεταβλητότητα** **0.25 < CV < 0.75**	**Υψηλή Μεταβλητότητα** **CV >0.75**
Απλή Γεωμετρία			
Περιγραφή κοιτάσματος	Επίπεδο, συνεχούς περιεκτικότητας και πάχους Οριζόντιο ή σταθερής κλίσης	Επίπεδα, μεγάλα σώματα μέση μεταβλητότητα περιεκτικότητας	Επίπεδα, μικρά σώματα ιδιαίτερα μεταβαλόμενη περιεκτικότητα
Παραδείγματα κοιτασμάτων	Εβαπορίτης Ιζηματογενής Σίδηρος Ασβεστόλιθος Γαιάνθρακας	Στρωματογραφικός Χαλκός Μόλυβδος κοιλάδας Μισσισσιπή Απλώς πορφυρικός χαλκός μολυβδαίνιο	Φλέβες χρυσού Προσχωματικός χρυσός Ουράνιο Νέου Μεξικού Αλλουβιακό διαμάντι
Μέθοδοι εκτίμησης	Περιεκτικότητα και πάχος με οποιαδήποτε δισδιάστατη μέθοδο: πολυγωνική, ισοϋψείς, αντιστρόφου αποστάσεως, kriging. Γεωμετρικός έλεγχος για όρια μεταλλοφόρων ζωνών, ρηγμάτων και αξόνων πτυχών	Δισδιάστατες μέθοδοι. Αντιστρόφου αποστάσεως ή kriging. Πολυγωνική ή τομών με 5 έως 15% αραίωση	Δισδιάστατες μέθοδοι. Αντιστρόφου αποστάσεως ή kriging με συναρτήσεις απόληψης. Πολυγωνική με 15 έως 35% αραίωση
Πολύπλοκη Γεωμετρία			
Περιγραφή κοιτάσματος	Απλή, στρωματογραφική. Ομοιογενής περιεκτικότητα αλλά ακανόνιστο πάχος, ελαφρά πτύχωση ή απλή ρηγμάτωση	Απλή τρισδιάστατη γεωμετρία. Μεταβλητή περιεκτικότητα	Απλή τρισδιάστατη γεωμετρία. Δισδιάστατη με μικρότερα, πιο ακανόνιστα σώματα μεταλλοφορίας. Απλή πτύχωση, ρηγμάτωση
Παραδείγματα κοιτασμάτων	Βωξίτης Λατεριτικό Νικέλιο Δόμος άλατος	Πορφυρικός χαλκός Πορφυρικό μολυβδαίνιο	Χρυσός τύπου stockwork ή carlin Βασικά ηφαιστειογενή μέταλλα
Μέθοδοι εκτίμησης	Εκτίμηση περιεκτικότητας, πάχους και υψομέτρων με οποιαδήποτε δισδιάστατη μέθοδο Απαραίτητος ο ορισμός της δομικής γεωλογίας (ρήγματα, άξονες πτύχωσης) Η μεταβλητότητα στο πάχος μπορεί να είναι δύσκολη στην πρόβλεψη	Αντιστρόφου αποστάσεως ή kriging με εξωτερικό έλεγχο για τον ορισμό των τάσεων περιεκτικότητας και σχήματος. Οι πολυγωνικές μέθοδοι και τομών μπορούν να χρησιμοποιηθούν αλλά θα απαιτούν διόρθωση διακύμανσης αραίωσης/όγκου	Αντιστρόφου αποστάσεως ή kriging με συναρτήσεις απόληψης. Πολυγωνική ή μέθοδος τομών με 15 έως 35% αραίωση
Ιδιαίτερα Πολύπλοκη Γεωμετρία			
Περιγραφή κοιτάσματος	Γενικά απλά κοιτάσματα που έχουν πτυχωθεί και ρηγματωθεί σε μεγάλο βαθμό	Πολύπλοκη γεωμετρία λόγω ρηγμάτωσης, πτύχωσης ή πολλαπλών μεταλλογεννετικών ελέγχων. Αρκετά μεταβαλλόμενη περιεκτικότητα	Κοιτάσματα με υπερβολικά μεταβαλλόμενη περιεκτικότητα και ιδιαίτερα πολύπλοκα σχήματα σωμάτων μεταλλοφορίας. Τυπικά χαμηλή συνέχεια μεταξύ ξεχωριστών ζωνών μεταλλοφορίας. Γενικά οριζόμενη μεταλλοφορία με 50% ή λιγότερο μετάλλευμα
Παραδείγματα κοιτασμάτων	Τάλκης Γύψος (παραμορφωμένος)	Σκαρν βολφραμίου (πτύχωση / ρηγμάτωση). Σκαρν βασικών μετάλλων (ακανόνιστου σχήματος). Πορφυρικός χαλκός συνδυαζόμενος με τοπικά σκαρν ή υλικά αντικατάστασης (πολλαπλοί έλεγχοι)	Αρχαϊκά κοιτάσματα χρυσού Κοιτάσματα ουρανίου
Μέθοδοι εκτίμησης	Μέθοδοι τομών με λεπτομερή ορισμό της δομικής γεωλογίας. Δύσκολη στον ορισμό γεωμετρία για τρισδιάστατα μοντέλα μπλοκ και γεωστατιστικές μεθόδους	Μέθοδοι τομών με λεπτομερή εισαγωγή για την περιγραφή της δομικής γεωλογίας και των ζωνών μεταλλοφορίας. Οι γεωστατιστικές μέθοδοι μπορεί να είναι κατάλληλες αλλά δύσκολες στην εφαρμογή λόγω της γεωμετρικής πολυπλοκότητας	Η εκτίμηση είναι πολύ δύσκολη. Το μέγεθος, σχήμα, και η περιεκτικότητα δεν είναι τοπικά προβλέψιμες. Εφαρμόζονται οι μέθοδοι τομών, εμβαδομετρικές, kriging δείκτη. Σφάλματα από 50 έως 100% είναι τυπικά. Το τονάζ συχνά υπερεκτιμάται λόγω του λανθασμένου γεωλογικού μοντέλου

Κύρτωση

Η τέταρτη ροπή γύρω από τον μέσο είναι:

$$\begin{aligned} \mu_4^{'} &= E[X - m]^4 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^4 \end{aligned}$$ **Εξίσωση 2-30**

Η ροπή αυτή μετρά την κύρτωση ή την 'οξύτητα'. Έχει ιδιαίτερη σημασία για κανονικές (Gaussian) κατανομές (τις οποίες θα συζητήσουμε με λεπτομέρεια αργότερα στο κεφάλαιο αυτό). Ιδιαίτερα, για μια Gaussian κατανομή ο λόγος:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4^{'}}{[\mu_2^{'}]^2} = 3$$ **Εξίσωση 2-31**

Ο *συντελεστής κύρτωσης* ορίζεται ως:

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$ **Εξίσωση 2-32**

Ως αποτέλεσμα, ο συντελεστής κύρτωσης ισούται με μηδέν για μια κατανομή Gaussian. Κατανομές με μεγαλύτερη οξύτητα από αυτήν έχουν θετικές τιμές του γ_2 και αναφέρονται ως λεπτοκυρτωτικές – αντίθετα, κατανομές με λιγότερη οξύτητα από μια Gaussian έχουν αρνητικές τιμές του γ_2 και αναφέρονται ως πλατυκυρτοτικές. Η κύρτωση, ενώ αναφέρεται από πολλά στατιστικά προγράμματα, δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε λοξές κατανομές.

Συνδιακύμανση και Συσχετισμός

Μια άλλη (πολύ σημαντική) ιδιότητα της διακύμανσης μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[XY]$$ **Εξίσωση 2-33**

όπου *Cov*[*XY*] είναι η *συνδιακύμανση* μεταξύ *X* και *Y*. Η συνδιακύμανση ορίζεται ως:

$$Cov[XY] = E[(X - m_X)(Y - m_Y)]$$ **Εξίσωση 2-34**

όπου m_X, m_Y αντιπροσωπεύουν τους μέσους των ΤΜ *X* και *Y* αντίστοιχα. Η συνδιακύμανση συμβολίζεται επίσης μερικές φορές ως σ_{XY}. Σημειώστε ότι μια ιδιότητα της συνδιακύμανσης είναι:

$$|Cov[XY]| \leq \sqrt{Var[X]} \cdot \sqrt{Var[Y]}$$ **Εξίσωση 2-35**

Αυτό σημαίνει ότι το κλάσμα:

$$\rho = \frac{Cov[XY]}{\sqrt{Var[X]} \cdot \sqrt{Var[Y]}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$ **Εξίσωση 2-36**

γνωστό και ως *συντελεστής συσχετισμού* είναι πάντα μεταξύ –1 και 1. Ο συντελεστής συσχετισμού μετρά την αμοιβαία σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών. Ιδιαίτερα:

1. Μια θετική τιμή του ρ δείχνει μια τάση για τα *X* και *Y* να αυξάνουν μαζί (συμπαθητικά).
2. Μια αρνητική τιμή του ρ δείχνει μια τάση για μεγάλες τιμές του *X* να σχετίζονται με μικρές τιμές του *Y* (δηλαδή τα *X* και *Y* είναι αντιστρόφως ανάλογα.
3. Όταν το ρ ισούται με 1.0, υπάρχει μια τέλεια γραμμική σχέση μεταξύ *X* και *Y*. Η σχέση έχει τη μορφή: *Y=αX+β*
4. Όταν τα *X* και *Y* είναι ανεξάρτητα, ο συντελεστής συσχετισμού τους ισούται με το μηδέν.
5. Σημείωση! Το αντίθετο γενικά δεν ισχύει, δηλαδή ο συντελεστής συσχετισμού μπορεί να είναι μηδέν για *X* και *Y* μη ανεξάρτητα.

Η συνδιακύμανση ισούται με μηδέν στην περίπτωση της ανεξαρτησίας. Η συνδιακύμανση μπορεί να γραφθεί ως:

$$Cov[XY] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$ **Εξίσωση 2-37**

Γραμμική Παλινδρόμηση

Σε πολλές γεωλογικές και μεταλλευτικές εφαρμογές, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τη μέση τιμή μιας μεταβλητής *Y* όταν η άλλη μεταβλητή *X* είναι σταθερή. Αυτός ο μέσος αντιπροσωπεύει την *καλύτερη δυνατή πρόβλεψη* του *Y* συναρτήσει του *X*. Ο πιο παραδοσιακός τρόπος για τον καθορισμό μιας τέτοιας συνάρτησης του *X* είναι να χρησιμοποιηθεί η διαδικασία ελαχίστων τετραγώνων για τον καθορισμό της ευθείας:

$$Y = \alpha + bX$$ **Εξίσωση 2-38**

ώστε το άθροισμα των τετραγωνισμένων αποκλίσεων από τη γραμμή αυτή να ελαχιστοποιείται. Μια και χρησιμοποιούμε μια γραμμική συνάρτηση του *X*, η παλινδρόμηση αυτή αποκαλείται γραμμική παλινδρόμηση.

Κοινές Κατανομές

Μερικές κατανομές έχουν ιδιαίτερη χρήση στη γεωστατιστική πρακτική και την εκτίμηση αποθεμάτων. Θα δώσουμε μερικές ιδιότητες της Gaussian ή κανονικής κατανομής και της λογαριθμικής κατανομής για αναφορά. Για περισσότερες λεπτομέρειες, ανατρέξτε σε οποιοδήποτε από τα στατιστικά κείμενα που δίνονται στο Παράρτημα A.

Κανονική - Gaussian Κατανομή

Η Gaussian κατανομή έχει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \qquad \textbf{Εξίσωση 2-39}$$

όπου *m* είναι ο μέσος και σ^2 η διακύμανση. Μια κανονική μεταβλητή συχνά συμβολίζεται ως $N(m,\sigma^2)$. Η κανονική συνάρτηση αθροιστικής κατανομής δίνεται σε πίνακες στα περισσότερα βιβλία στατιστικής, και χρησιμοποιώντας τέτοιους πίνακες μπορούμε να πούμε τα εξής:

- Υπάρχει προσεγγιστικά πιθανότητα 90% η *X* να βρίσκεται στο διάστημα $[m\pm1.645\sigma]$
- Υπάρχει προσεγγιστικά πιθανότητα 95% η *X* να βρίσκεται στο διάστημα $[m\pm1.96\sigma]$
- Υπάρχει προσεγγιστικά πιθανότητα 98% η *X* να βρίσκεται στο διάστημα $[m\pm2.326\sigma]$, κλπ.

Ο συγγραφέας δεν γνωρίζει κοιτάσματα που να διαθέτουν απόλυτα κανονικές κατανομές. Όμως, η κανονική κατανομή είναι πολύ σημαντική στη στατιστική και γεωστατιστική για τους παρακάτω λόγους:

1. Κάποιες κατανομές στοιχείων παρουσιάζουν κανονικό ιστόγραμμα εάν λάβουμε τους λογάριθμους (δείτε την επόμενη ενότητα).
2. Η κανονική κατανομή έχει χρήσιμες εφαρμογές ως μετασχηματισμός αντιμετώπισης της λοξότητας. Είναι δυνατό να μετασχηματιστεί οποιαδήποτε μονοπαραμετρική κατανομή σε κανονική, είτε γραφικά ή με την πολυωνυμική επέκταση Hermite (Hohn, 1988). Οι μετασχηματισμένες τιμές μπορούν να χρησιμοποιηθούν με διάφορους τρόπους και να σχηματίσουν τη βάση ενός αριθμού προηγμένων γεωστατιστικών τεχνικών, συμπεριλαμβανομένων:
    - Διαζευκτικό (disjunctive) kriging (Matheron και Armstrong, 1986)
    - Υπό συνθήκη προσομοίωση κοιτασμάτων (Journel και Huijbregts, 1978).
    - Το μοντέλο στήριξης διακριτής Gaussian μεταβολής (Guibal, 1987).

Λογαριθμική Κατανομή

Σε πολλά προβλήματα των γεωεπιστημών οι κατανομές τείνουν να είναι θετικά λοξές. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας μικρός αλλά σημαντικός αριθμός από αρκετά υψηλές τιμές. Ειδικά, αυτό το είδος λοξότητας είναι κοινό για στοιχεία που έχουν χαμηλή εμφάνιση, για παράδειγμα ιχνοστοιχεία σε έρευνες εδάφους. Οι κατανομές κοιτασμάτων ακριβών μετάλλων είναι συχνά θετικά λοξές. Για κατανομές θετικά λοξές, συχνά βρίσκουμε ότι οι λογάριθμοι των τιμών τείνουν προς μια κανονική κατανομή.

Ορισμός

Εάν ένας μετασχηματισμός των λογαρίθμων οδηγεί σε μια κατανομή που είναι κανονική, τότε η κατανομή της *X* λέγεται ότι είναι *λογαριθμική*. Σημειώστε ότι εάν ο log *Y* έχει μια κανονική κατανομή, τότε το ίδιο ισχύει και για το $\log_e$ *Y* (φυσικός λογάριθμος). Τα κοιτάσματα χρυσού της Νότιας Αφρικής είναι κλασικό παράδειγμα λογαριθμικής κατανομής περιεκτικότητας. Πολλές άλλες γεωεπιστημονικές χημικές κατανομές έχουν λογαριθμική κατανομή χωρίς να έχει δοθεί καμιά πραγματικά ικανοποιητική φυσική εξήγηση σε αυτό το γεγονός. Η συνάρτηση πυκνότητας της λογαριθμικής τυχαίας μεταβλητής *Y* είναι:

$$f(y) = \frac{\log e}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{\log\gamma - \log y}{\sigma}\right)^2 \qquad \textbf{Εξίσωση 2-40}$$

όπου *γ* είναι ο διάμεσος της κατανομής δηλαδή:

$$\gamma = 10^{\mu} \qquad \textbf{Εξίσωση 2-41}$$

όπου *μ* είναι ο μέσος των λογάριθμων των τιμών *Y* (δηλαδή ο μέσος των τιμών *x* = log *y*) και σ είναι η τυπική απόκλιση των λογαρίθμων. Μια λογαριθμική κατανομή ορίζεται πλήρως από τις δυο παραμέτρους *μ* και *γ* και έτσι αναφέρεται συχνά ως μια *λογαριθμική κατανομή δυο παραμέτρων*. Ο μέσος της λογαριθμικής κατανομής *δεν* είναι ο μέσος των λογαρίθμων. Ο μέσος *m* και η διακύμανση s^2 ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} m &= \gamma \cdot 10^{\sigma^2/2} \\ s^2 &= m^2(10^{\sigma^2} - 1) \end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 2-42}$$

Δοκιμάζοντας τη Λογαριθμικότητα

Υπάρχουν δυο κοινές δοκιμές που χρησιμοποιούνται:

1. Η σχεδίαση της κατανομής αθροιστικής συχνότητας σε λογαριθμικό χαρτί. Εάν προκύπτει μια ευθεία γραμμή, η κατανομή είναι λογαριθμική.
2. Η δοκιμή Χ-τετράγωνο 'ορθότητας προσαρμογής'. Το τεστ χ^2 είναι ένα γενικό τεστ για τη δοκιμή της προσαρμογής σε μια κατανομή. Μια και αναλύεται στα περισσότερα στατιστικά βιβλία, δεν θα το αναλύσουμε με λεπτομέρεια εδώ. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει ένα πλήρες παράδειγμα εφαρμογής του τεστ χ^2 για τη λογαριθμική περίπτωση στον Sinclair (1984).

Λογαριθμική Κατανομή Τριών Παραμέτρων

Εάν η σχεδίαση της αθροιστικής συχνότητας σε λογαριθμικό χαρτί οδηγεί σε μια καμπύλη που αποκλίνει από μια ευθεία γραμμή αυτό μπορεί να αποτελεί ένδειξη λοξότητας υπό λογαριθμικές συνθήκες. Σε μια τέτοια περίπτωση, μια προσθετική σταθερά *α* μπορεί να μετασχηματίσει την κατανομή σε λογαριθμικότητα. Μια τέτοια κατανομή αναφέρεται ως *λογαριθμική κατανομή τριών παραμέτρων.* Παράδειγμα δίνεται από τον David (1977, σελ. 14).

Σημειώστε ότι παρόλο που μπορεί να έχουμε λογαριθμικές 'συνθήκες' σε ένα κοίτασμα (ή ομάδα κοιτασμάτων) μπορούν να υπάρχουν πολλές λογαριθμικές κατανομές. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση μερικών χρυσωρυχείων στη Νότια Αφρική. Για παράδειγμα, στο Witwatersrand, πολλές διαφορετικές ζώνες, ή μεμονωμένες φλέβες, εντός του ίδιου κοιτάσματος μπορούν να έχουν διαφορετικές λογαριθμικές κατανομές.

Ο Εκτιμητής-t του Sichel

Ο συμβατικός τρόπος να εκτιμηθεί ο μέσος της κατανομής δειγμάτων περιεκτικότητας είναι να χρησιμοποιηθεί ο αριθμητικός μέσος. Όμως, στην περίπτωση μιας λογαριθμικής κατανομής όταν έχουμε στη διάθεση μας έναν μικρό αριθμό δειγμάτων, ο αριθμητικός μέσος τείνει να υπερεκτιμήσει τον μέσο του πληθυσμού. Αυτό οφείλεται σε έναν μικρό αριθμό πολύ υψηλών τιμών που μπορεί να λάβουμε όταν εξετάζουμε δείγματα από μια λογαριθμική κατανομή.

Ο Sichel (1952) πρότεινε τον εκτιμητή *t* για τη λήψη μιας λιγότερο εσφαλμένης εκτίμησης του μέσου σε τέτοιες περιπτώσεις. Ο *t* του Sichel ορίζεται ως:

$$t = e^{M}\,\phi(V) \qquad \textbf{Εξίσωση 2-43}$$

όπου *M* είναι ο μέσος των φυσικών λογάριθμων των τιμών των δειγμάτων και $\varphi(V)$ είναι μια σειρά σύνθετων δυνάμεων που δίνεται από τον Sichel (1952) και τον David (1977), ενώ και οι δύο δίνουν παραδείγματα εφαρμογής.

Στην περίπτωση μιας λογαριθμικής κατανομής, ο εκτιμητής του Sichel θα πρέπει να δώσει μια τιμή μικρότερη ή παρόμοια με τον αριθμητικό μέσο. Δεν είναι σπάνιο, ο εκτιμητής του Sichel να δίνει πολύ παρόμοια εκτίμηση του μέσου με τον αριθμητικό μέσο. Σε άλλες περιπτώσεις, όμως, η διαφορά μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη.

Εάν λάβουμε μια τιμή Sichel που είναι κατά πολύ μεγαλύτερη του αριθμητικού μέσου θα πρέπει να υποπτευθούμε ότι η κατανομή μας *δεν* είναι λογαριθμική! Δίνεται έμφαση στο ότι ο t του Sichel μπορεί να δώσει αναξιόπιστα αποτελέσματα εάν η κατανομή δεν είναι λογαριθμική. Είναι απαραίτητη μια προσεκτική δοκιμή της λογαριθμικότητας πριν τη χρήση της μεθόδου αυτής. Ο David (1977) δίνει ένα παράδειγμα εφαρμογής προερχόμενο μάλιστα από την εργασία του Sichel.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Ποιες παραμέτρους μέτρησης της διασποράς μιας κατανομής γνωρίζετε;
2. Πως επιλέγουμε το πλήθος και το εύρος των κλάσεων σε ένα ιστόγραμμα;
3. Ποια μέθοδο θα χρησιμοποιούσατε για την εκτίμηση της περιεκτικότητας ενός κοιτάσματος που παρουσιάζει μέση μεταβλητότητα και πολύπλοκη γεωμετρία;
4. Πως δοκιμάζουμε τη λογαριθμικότητα μιας κατανομής;
5. Τι συμβαίνει όταν ο συντελεστής συσχετισμού μεταξύ δύο κατανομών έχει τιμή 1;

6. Να υπολογίσετε το μέσο όρο, τη διακύμανση, τη λοξότητα, και την κύρτωση των παρακάτω αναλύσεων περιεκτικότητας Cu. Επίσης, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα της κατανομής σε κλάσεις εύρους 0,25.

Cu
0.175
0.417
0.489
0.215
0.396
0.685
0.377
0.427
0.14
0.392

0.32
0.717
0.806
0.889
0.475
0.23
0.833
0.453
0.719
1.009
0.893

0.089
0.092
0.102
0.915
1.335
0.519
0.072
0.04
1.365
0.023
0.644

0.258
0.638
1.615
0.765
0.465
0.034
0.476
0.409
0.165
0.063
0.406

0.909
0.012
0.228
0.224
0.188
0.027
0.395
0.225

3. ΧΩΡΟΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΒΑΡΙΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Αβεβαιότητα και τα Κοιτάσματα

Καθώς οι πληροφορίες που έχουμε από τη μεταλλοφορία μας είναι διεσπαρμένες, χρειαζόμαστε ένα μοντέλο που θα μπορεί να βγάλει συμπεράσματα σχετικά με άγνωστες περιοχές της μεταλλοφορίας. Όπως είπαμε στο Κεφάλαιο 1, αυτές οι άγνωστες περιοχές χωρίς δείγματα αντιπροσωπεύουν ουσιαστικά το 100% του εξεταζόμενου όγκου!

Καθοριστικές Προσεγγίσεις

Η χωρική κατανομή του μετάλλου στα σώματα μεταλλοφορίας είναι αποδεδειγμένα προϊόν μη τυχαίας διαδικασίας. Αντιθέτως, ελέγχεται από πολύπλοκους συνδυασμούς φυσικών και χημικών συστημάτων, που μπορεί να περιλαμβάνουν, για παράδειγμα:

- Τη γεωμετρία και δυναμική των αρχικών συστημάτων ιζηματογένεσης.
- Την πετροχημεία και το ιστορικό ψύξης των ηφαιστειακών πετρωμάτων.
- Τη γεωχημεία και θερμοδυναμική των υδροθερμικών ρευστών.
- Την αλληλεπίδραση των υδροθερμικών ρευστών με τα πετρώματα.
- Τους τοπικούς βαθμούς θερμοκρασίας και πίεσης.
- Τη δομική γεωλογία.
- Τις διαδικασίες αποσάθρωσης.

Σε κάθε κοίτασμα, και συχνά σε διαφορετικά μέρη του ίδιου κοιτάσματος, οι αιτιολογικοί παράγοντες (δηλαδή αυτοί που ελέγχουν την εισαγωγή του μετάλλου και την απόθεση) είναι διαφορετικοί σε λεπτομέρεια και σχετική σημασία.

Εφόσον η γένεση της μεταλλοφορίας είναι ένας συνδυασμός *φυσικών διαδικασιών*, ο πιο λογικά ελκυστικός και ικανοποιητικός τρόπος να μοντελοποιηθεί η κατανομή στο χώρο του μετάλλου θα ήταν να χρησιμοποιηθεί ένα πλήρες φυσικό μοντέλο του πως ‘δημιουργήθηκαν’ οι περιεκτικότητες. Δυστυχώς, η γνώση των γεωλογικών διαδικασιών σε τόσο πολύπλοκα συστήματα όπως τα σώματα μεταλλοφορίας δεν είναι αρκετά ανεπτυγμένη ακόμα για να επιτρέψει την κατασκευή λεπτομερών *καθοριστικών* μοντέλων της τοπικής κατανομής του μεταλλεύματος. Ακόμα και στην περίπτωση σχετικά απλών μοντέλων ενός στοιχείου ενός γεωλογικού συστήματος, τα καθοριστικά μοντέλα φυσικών διαδικασιών είναι εξαιρετικά δύσκολο να κατασκευασθούν και μπορεί να είναι πολύ δύσκολα στη χρήση τους. Για παράδειγμα, αναφερθείτε στον Cathles (1981) και τον Thorn (1988) οι οποίοι συζητούν καθοριστική μοντελοποίηση μεταλλοφορίας σχετικής με ηφαιστειακές εισχωρήσεις που ψύχονται και απλά γεωμορφολογικά μοντέλα και μοντέλα μεταφοράς ιζημάτων αντίστοιχα. Στην περίπτωση της μοντελοποίησης της χωρικής κατανομής της περιεκτικότητας ενός σώματος μεταλλοφορίας, ο αριθμός των παραμέτρων θα ήταν εκπληκτικός και αυτή η προσέγγιση είναι φανερά ένα αδιέξοδο για έναν μεταλλειολόγο ή έναν ερευνητή.

Έτσι μένουμε με τα δεδομένα και, συνήθως, κάποια γνώση παραγόντων μεγαλύτερης κλίμακας που επηρεάζουν την κατανομή πιθανά εκμεταλλεύσιμων περιεκτικοτήτων. Για παράδειγμα, μπορεί να γνωρίζουμε γεωλογικές δομές που μετατοπίζουν τα μεταλλοφόρα σώματα, ή να μπορούμε να ξεχωρίσουμε πολλές ζώνες εντός ενός σώματος που διαφέρουν στη γεωλογία. Στην κλίμακα των ίδιων των δειγμάτων, όμως, υπάρχει αβεβαιότητα για το πως συμπεριφέρονται οι περιεκτικότητες μεταξύ θέσεων δειγμάτων.

Επιφάνειες Τάσεων

Μπορούμε να προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε μια ιδιαίτερα γνωστή στατιστική μέθοδο, όπως *η ανάλυση επιφανειών τάσεων*. Η παραδοχή που βρίσκεται κάτω από αυτούς τους τύπους μεθόδων παλινδρόμησης είναι ότι η υπό εξέταση επιφάνεια μπορεί να αποδοθεί (τουλάχιστον τοπικά) από μια σχετικά απλή καθοριστική συνάρτηση – όπως ένα πολυώνυμο – συν έναν τυχαίο συντελεστή σφάλματος. Εδώ η λέξη ‘τυχαίο’ σημαίνει ότι το σφάλμα δεν συσχετίζεται με τη θέση και είναι επίσης μη συσχετισμένο με τη συνάρτηση. Αυτή η προσέγγιση εφαρμόστηκε στο πρόβλημα της μοντελοποίησης γεωλογικών δεδομένων στο χώρο από τους Gomez και Hazen (1970) για τη μοντελοποίηση της αναλογίας της κατανομής πυριτικού θείου σε ένα στρώμα άνθρακα (Πίνακας 3.1).

Εξίσωση A-1 (Pyritic sulfur, coarse coal) =

$$14.054839 - 5.9791017 \times AS + 1.357313 \times SU + 1.3423239 \times SU \times (AS - SU) - 0.41944856 \times AS \times SU \times (AS - SU) + 4.9530773 \times 10^{-3} [AS \times SU \times (AS - SU)]^2 - 2.6972834 \times 10^{-4} [AS \times SU \times (AS - SU)]^3 + 5.8896324 \times 10^{-11} \times e^{(AS \times SU)} - 1.3899584 \times 10^{-6} [e^{[AS \times (AS - SU)]}] + 0.010363711 [e^{[SU \times (AS - SU)]}] - 16.709848 [AS \times SU / e^{(AS \times SU)}] + 5.6708047 \times 10^{-3} [AS \times (AS - SU) / e^{[AS \times (AS - SU)]}] - 1.9607908 \times 10^{-5} [SU \times (AS - SU)/e^{[SU \times (AS - SU)]}] + 0.10468819 \times \sin(AS \times SU)^3 \times \cos(AS \times SU)^2 - 9.5341881 \times 10^{-3} \times \sin[AS \times (AS - SU)]^3 \times \cos[AS \times (AS-SU)]^2 - 0.084822438 \times \sin[SU \times (AS - SU)]^3 \times \cos[SU \times (AS - SU)]^2 - 2.0867686 \times \sin(AS) - 2.1912461 \times \sin(SU) + 1.4966257 \times \sin(AS - SU) + 0.10798332 \times e^{AS} - 0.050473307 \times e^{SU} + 0.31265659 \times e^{(AS - SU)} - 0.049198332 \times \sin(AS^3) \times \cos(AS^2) + 0.043477171 \times \sin(SU^3) \times \cos(SU^2) - 1.8122988 \times 10^{-4} \times \sin(AS - SU)^3 \times \cos(AS - SU)^2 - 2.0170352 \times 10^{-4} \times e^{AS} \times e^{SU} \times e^{(AS - SU)}$$

Μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην εξίσωση
AS = Τέφρα στον άνθρακα, επί τοις εκατό
SU = Θειάφι στον άνθρακα, επί τοις εκατό

Πίνακας 3.1 Παράρτημα A από τους Gomez και Hazen (1970) – δείτε το κείμενο για τη σχετική συζήτηση.

Το πρόβλημα με μια τέτοια προσέγγιση είναι ότι οι πιο πολλές γεωλογικές μεταβλητές (και σίγουρα όλες οι οικονομικές μεταβλητές) παρουσιάζουν σημαντική μεταβολή μικρής κλίμακας μαζί με τάσεις μεγαλύτερης κλίμακας που μπορούν να αποδοθούν αρκετά καλά από μια καθοριστική συνάρτηση όπως στον πίνακα 3.1. Σε αυτήν την προσέγγιση επιφάνειας τάσεων, περιοριζόμαστε από την παραδοχή ότι έχουμε μη συσχετιζόμενα σφάλματα. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση που χρησιμοποιούμε πρέπει να είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη όπως φαίνεται άλλωστε από την πληθώρα εκθετικών και τριγωνομετρικών όρων στον πίνακα 3.1. Αυτό σημαίνει ότι μάλλον θα ήταν καλύτερα εάν επιτρέπαμε συσχετισμούς μεταξύ τιμών σε διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ τους – και αυτή είναι η βασική ιδέα της γεωστατιστικής.

Μοντέλα Πιθανοτήτων

Οι γεωλόγοι οι οποίοι έχουν εκτελέσει εκτενείς μελέτες δειγματοληψίας γνωρίζουν ότι οι γεωλογικές μεταβλητές (περιεκτικότητα, πάχος, κλπ) τείνουν να εμφανίζουν σημαντική διασπορά μικρής κλίμακας. Οι μεταβολές τους στον χώρο είναι τόσο πολύπλοκες που δεν μπορούν να αποδοθούν σε όρους συνηθισμένων μαθηματικών συναρτήσεων. Εάν μπορούσαμε να γνωρίζουμε την πραγματική κατανομή των περιεκτικοτήτων κατά μήκος μιας διασκόπευσης και να τη σχεδιάσουμε, το ίχνος θα έμοιαζε με το Σχήμα 3.1: ‘μυτερό’ με δυσπρόβλεπτα πηδήματα και πριονωτό σχήμα. Αντίθετα με την υπεραισιόδοξη άποψη των προσεγγίσεων επιφανειών τάσεων, φαίνεται πως η παρεμβολή δεν είναι καθόλου δυνατή.

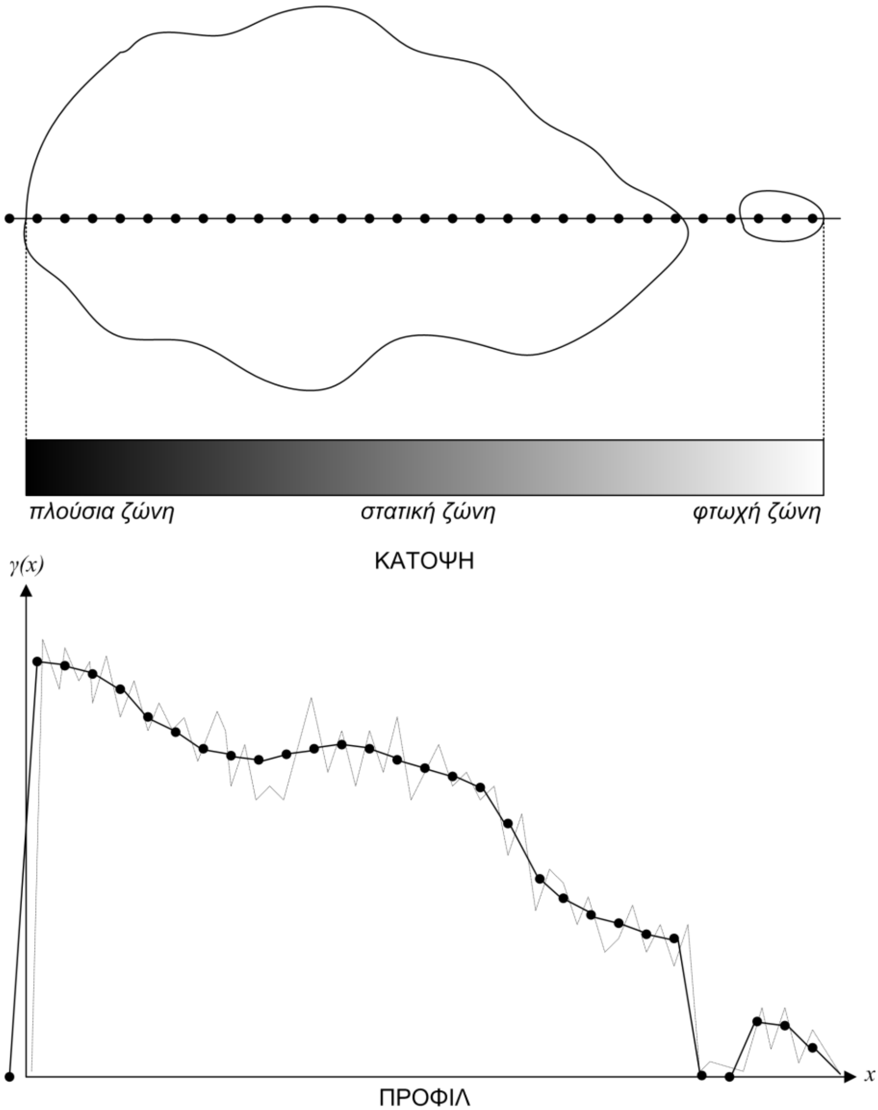
Η μερική γνώση των παραγόντων που επηρεάζουν την κατανομή της περιεκτικότητας στον χώρο οδηγεί ενάντια στη χρήση καθοριστικών μοντέλων για τη λεπτομερή κατανομή της μεταλλοφορίας. Αυτό είναι το κίνητρο μας για την υιοθέτηση μοντέλων πιθανοτήτων όταν αντιμετωπίζουμε χώρους όπως τα κοιτάσματα.

‘Τυχαιότητα’

Χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο πιθανοτήτων μας επιτρέπεται να συμπεριλάβουμε την αβεβαιότητα εξετάζοντας τα διαθέσιμα δεδομένα ως αποτελέσματα μιας *τυχαίας διαδικασίας*. Η υιοθέτηση μιας προσέγγισης πιθανοτήτων για τη μοντελοποίηση μεταλλοφορίας δεν υπονοεί ότι πιστεύουμε πως η υποκείμενη διαδικασία είναι τυχαία. Η κατανόηση των πολλών και πολύπλοκων διαδικασιών που δημιουργούν το μετάλλευμα, ειδικά στο φως ογκομετρικά ασήμαντων ποσοτήτων δειγμάτων, είναι γενικά πολύ φτωχή ώστε αυτή η πολυπλοκότητα να μπορεί μόνον να αιχμαλωτιστεί ικανοποιητικά από ένα μοντέλο πιθανοτήτων.

Η χρήση του όρου τυχαίος ως συνώνυμο του *μη προβλέψιμου* είναι έτσι ακατάλληλη υπό αυτές τις συνθήκες. Παρόλο που το ρίξιμο των κερμάτων οδηγεί σε τυπικές καταστάσεις που μπορούν επιτυχώς να μοντελοποιηθούν από την προσέγγιση των τυχαίων μεταβλητών, οι καταστάσεις αυτές είναι κατάλληλες για την εφαρμογή καθοριστικών μοντέλων **εφόσον έχουμε επαρκή γνώση των μεταβλητών παραγόντων που τις επηρεάζουν**. Το αποτέλεσμα της ρήψης του κέρματος ελέγχεται από τη Νευτώνεια φυσική. Όμως, οι μεταβολές στις αρχικές συνθήκες και τη δυναμική κατά τη ρήψη (ακριβής αρχική θέση, λεπτομέρειες των δυνάμεων που ενεργούν, τοπικό ρεύμα αέρος και μεταβολές στη θερμοκρασία κλπ) είναι αρκετές για να αλλάξουν το αποτέλεσμα. Κατά συνέπεια, το αποτέλεσμα φαίνεται τυχαίο, και μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το αποτέλεσμα κάθε ρήψης ως το αποτέλεσμα ή την *πραγματοποίηση* μιας τυχαίας μεταβλητής (ΤΜ). Δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα μιας δοσμένης ρήψης ενός ζαριού ή κέρματος. Τα αποτελέσματα, όμως, είναι προβλέψιμα με την έννοια ότι μπορούμε να δώσουμε την πιθανότητα για τις περιπτώσεις ‘το κέρμα να πέσει με το κεφάλι προς τα επάνω’ ή ‘ρίχνοντας το ζάρι οδηγεί σε ένα μονό αριθμό να φαίνεται στην επάνω επιφάνεια του’ για κάθε δοκιμή.

Η εξέταση του ζαριού ή του κέρματος καταλαμβάνει μεγάλο μέρος του περιεχομένου πολλών εισαγωγικών μαθημάτων στη στατιστική και τις πιθανότητες γιατί οι πιθανότητες μπορούν εύκολα να υπολογιστούν.



Σχήμα 3.1: Τυχαία και δομημένα στοιχεία μιας χωρομεταβλητής (ΧΜ).

Για ένα αμερόληπτο ζάρι, κάθε στοιχειώδες αποτέλεσμα συμβαίνει με ίση συχνότητα μακροπρόθεσμα – μάλιστα, αυτό αποτελεί έναν ορισμό της πιθανότητας (Feller, 1968). Εάν το ζάρι σφάλει (είναι 'φορτωμένο') μπορούμε να επιλέξουμε άλλες πιθανότητες παρατηρώντας ένα μεγάλο αριθμό ρήψεων. **Αυτή η διαδικασία είναι απλά μη διαθέσιμη σε εμάς όταν εξετάζουμε κοιτάσματα!**

Γεωστατιστική Προσέγγιση

Στη γεωστατιστική γενικά δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε πολλαπλά 'αποτελέσματα' της διαδικασίας που μελετάμε. Έχουμε μια ομάδα από δεδομένα κατανεμημένα στο χώρο (τις περιεκτικότητες των δειγμάτων, για παράδειγμα), από ένα μοναδικό σώμα μεταλλοφορίας, και θέλουμε να χαρακτηρίσουμε μια τυχαία διαδικασία που *θα μπορούσε* να παράγει τα δεδομένα που παρατηρήσαμε. Έτσι, παρόλο που η ιδέα ενός μοντέλου πιθανοτήτων φαίνεται σαν μια καλή κατεύθυνση για να προχωρήσουμε, θα πρέπει να εξετάσουμε μερικούς παράγοντες με περισσότερη λεπτομέρεια.

Τις περισσότερες φορές, εάν είχαμε πρόσβαση σε ένα διάγραμμα σαν αυτό του σχήματος 3.1, η πιο κοντινή εξέταση θα αποκάλυπτε ότι οι περιεκτικότητες *δεν* είναι εντελώς τυχαίες. Αυτό το περιμένουμε, δεδομένης της γνώσης των πιο μακροσκοπικών γεωλογικών και γενετικών παραγόντων πίσω από τα κοιτάσματα. Βλέπουμε ότι δείγματα πιο κοντά το ένα στο άλλο στη διαδρομή μας δείχνουν να συσχετίζονται, δηλαδή γειτονικά σημεία δείχνουν να σχετίζονται: συνολικά, υπάρχουν ζώνες όπου οι τιμές τείνουν να είναι υψηλές καθώς και ζώνες χαμηλής περιεκτικότητας. Στην πραγματική μεταλλοφορία αναμένουμε κάποιο σχήμα των περιεκτικοτήτων στον χώρο, κάποιους προσανατολισμούς των ζωνών υψηλής περιεκτικότητας, περιοχές ομαλής μεταλλοφορίας και ζώνες πιο ακανόνιστης μεταλλοφορίας.

Τα Διπλά Χαρακτηριστικά των Τυχαίων Μεταβλητών

Ο όρος *Χωρομεταβλητή* (ΧΜ) επιλέχθηκε από τον George Matheron για να δώσει έμφαση στη διπλή φύση τέτοιων μεταβλητών, οι οποίες συνδυάζουν δυο διαφορετικά στοιχεία:

1. Ένα τυχαία στοιχείο: αυτό περιλαμβάνει τοπικές, και μικρής κλίμακας ανωμαλίες.
2. Ένα δομημένο ή *χωρικό* στοιχείο: αυτό περιλαμβάνει μεγάλης κλίμακας τάσεις των φαινομένων.

Τα κοινά στατιστικά μοντέλα (όπως οι επιφάνειες τάσεων) τοποθετούν ολόκληρο το τυχαίο στοιχείο σε έναν όρο σφάλματος ενώ ολόκληρο το δομικό στοιχείο βρίσκεται σε μια καθοριστική συνάρτηση. Κάτι τέτοιο δεν είναι ρεαλιστικό για γεωλογικά φαινόμενα. Ένας καλύτερος τρόπος να αναπαρασταθεί η κατανομή των περιεκτικοτήτων στο χώρο είναι να εισάγει κανείς την τυχαιότητα σε όρους διακυμάνσεων από μια σταθερή επιφάνεια τους οποίους οι γεωστατιστικοί αναφέρουν ως *τάση* (για να αποφευχθεί οποιαδήποτε πιθανή σύγχυση με τον όρο 'τάση' που χρησιμοποιήθηκε νωρίτερα για να περιγράψουμε την προσέγγιση της επιφάνειας τάσεων). Οι διακυμάνσεις έτσι δεν θεωρούνται 'σφάλματα' αλλά μάλλον κανονικά στοιχεία του φαινόμενου που εξετάζεται, δηλαδή στοιχεία της κατανομής των περιεκτικοτήτων στο χώρο (Vann, 1997).

Η πρώτη εργασία στη γεωστατιστική είναι να αναγνωριστούν αυτές οι τυχαίες και τοπικές δομές, που αναφέρονται ως *δομικές ιδιότητες*. Η διαδικασία αναγνώρισης και μοντελοποίησης τους είναι η *δομική ανάλυση*. Μετά από το στάδιο αυτό, μπορούμε να προχωρήσουμε στη λύση διαφόρων τύπων προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένης και της εκτίμησης.

Χωρομεταβλητές: Θεωρητικό Υπόβαθρο

Τυχαίες Συναρτήσεις

Η παρατηρούμενη τιμή σε κάθε δεδομένο σημείο *x* μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα *z(x)* μιας τυχαίας μεταβλητής (ΤΜ) *Z(x)*. Το Σχήμα 3.2 δείχνει τη σχέση αυτή. Ο μέσος της ΤΜ *Z(x)* στο σημείο *x* ονομάζεται τάση *m(x)*.

Σε θέσεις στο χώρο όπου δεν υπάρχουν διαθέσιμα δείγματα, οι τιμές *z(x)* ορίζονται πολύ καλά, και ας είναι άγνωστες. Οι τιμές του *z(x)* σε αυτές τις θέσεις μπορούν να εκληφθούν ως αποτελέσματα των τυχαίων μεταβλητών *Z(x)*. Σε μαθηματική ορολογία, οι οικογένεια όλων αυτών των ΤΜ, *Z(x)* ονομάζεται *Τυχαία Συνάρτηση* (ΤΣ).

Μια τυχαία συνάρτηση έχει την ίδια σχέση με μια από τις πραγματοποιήσεις της όπως μια τυχαία μεταβλητή με το αποτέλεσμα της. Σημειώστε ότι η πραγματοποίηση μιας ΤΣ είναι μια συνάρτηση, ενώ το αποτέλεσμα μιας ΤΜ είναι ένας αριθμός. Μια τυχαία συνάρτηση χαρακτηρίζεται από την κοινή κατανομή μιας ομάδας τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή

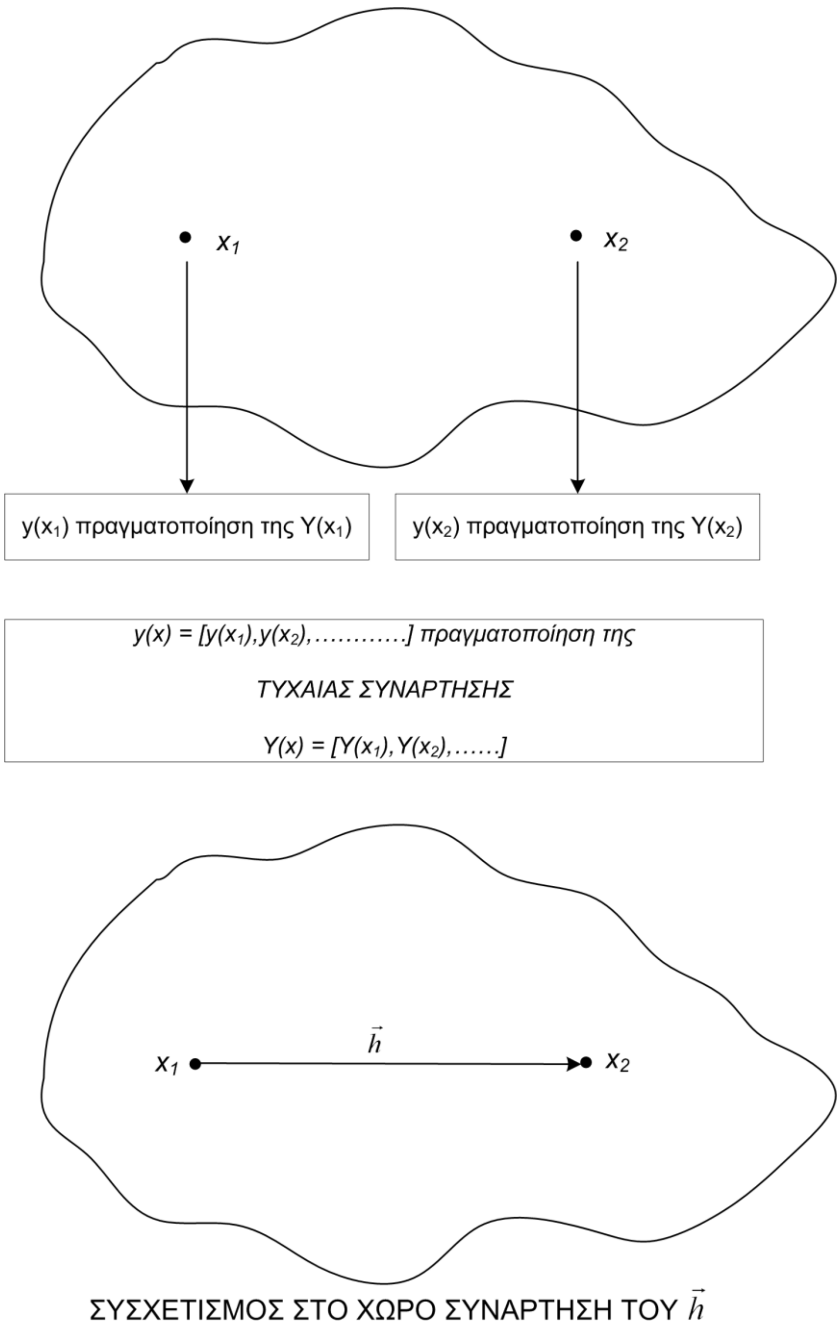
$$Z(x_1), Z(x_2),\ldots, Z(x_k) \text{ για όλα τα σημεία } x_1,x_2,\ldots,x_k$$

Για να είναι το μοντέλο πιθανοτήτων μας χρήσιμο πρέπει να κάνουμε μερικές παραδοχές για τα χαρακτηριστικά αυτών των κατανομών. Ειδικά, όπως συζητήσαμε νωρίτερα, έχουμε μόνο μια πραγματοποίηση διαθέσιμη (γενικά). Αυτό είναι ένα γενικό πρόβλημα *στατιστικής συνέπειας*: όταν μόνο μια πραγματοποίηση είναι διαθέσιμη χρειαζόμαστε κι άλλες παραδοχές. Αυτές οι επιπρόσθετες παραδοχές, ή υποθέσεις, μειώνουν τον αριθμό των *παραμέτρων* από τις οποίες εξαρτάται η ΤΣ.

Το όλα θέμα είναι να εισάγουμε τον ελάχιστο αριθμό υποθέσεων για να μπορεί το μοντέλο μας να καλύπτει το μεγαλύτερο εύρος πρακτικών καταστάσεων. Σημειώστε ότι καμιά μεθοδολογία εκτίμησης δεν είναι άμοιρη υποθέσεων, και ότι κάποιες από αυτές τις υποθέσεις πίσω από ‘κλασσικές’ μεθοδολογίες είναι στην πραγματικότητα πολύ μεγάλες. Για παράδειγμα, σε μια πολυγωνική εκτίμηση, υποθέτουμε πως η περιεκτικότητα είναι *σταθερή* στην περιοχή επιρροής που ορίζεται από ένα πολύγωνο!

Στασιμότητα

Είναι κοινό σε πολλές στατιστικές εφαρμογές να υποθέτουμε ότι μια μεταβλητή μπορεί να θεωρηθεί ως *στάσιμη*. Με άλλα λόγια, ότι ο κατανομικός κανόνας της μεταβλητής είναι αμετάβλητος (δεν αλλάζει) κατά τη μετατόπιση. Μια στάσιμη τυχαία συνάρτηση είναι ομογενής και αυτο-επαναλαμβανόμενη στο χώρο. Η υπόθεση της στασιμότητας κάνει δυνατή τη στατιστική συνέπεια.



Σχήμα 3.2: Τυχαίες μεταβλητές και τυχαίες συναρτήσεις.

Αυστηρή Στασιμότητα

Στην αυστηρή της έννοια, η στασιμότητα απαιτεί όλες οι ροπές της κατανομής να είναι αμετάβλητες κατά τη μετατόπιση, δηλαδή να έχουμε ακριβώς την ίδια κατανομή σε κάθε σημείο του πεδίου που εξετάζεται. Αυτό δεν μπορεί να επαληθευθεί από την πολύ περιορισμένη δειγματοληψία που συνήθως είναι διαθέσιμη. Σε κάθε περίπτωση, μια τέτοια μεγάλη παραδοχή δεν επιτρέπει απαραίτητα τη στατιστική συνέπεια στις γεωστατιστικές εφαρμογές.

Αδύναμη ή 2^{ου} Βαθμού Στασιμότητα

Στη γεωστατιστική συνήθως απαιτούμε μόνο από τις δύο πρώτες ροπές της κατανομής – τον μέσο και τη συνδιακύμανση – να είναι αμετάβλητες κατά τη μετατόπιση (δηλαδή σταθερές). Αυτό λέγεται αδύναμη ή δευτέρου βαθμού στασιμότητα. Για την υπόθεση αυτή κάνουμε τις εξής παραδοχές:

1. Ότι η αναμενόμενη τιμή (ή μέσος) της ΤΣ *Z(x)* είναι σταθερή για όλα τα σημεία *x*, δηλαδή

$$E[Z(x)] = m(x) = m \text{ για κάθε } x \qquad \textbf{Εξίσωση 3-1}$$

2. Ότι η συνάρτηση συνδιακύμανσης *C(h)* μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων *x* και *(x+h)*, όπου το *(x+h)* χωρίζεται από το *x* από μια διανυσματική απόσταση *h*, είναι ανεξάρτητη από τη θέση των δύο αυτών σημείων. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$E[Z(x)\cdot Z(x+h)] - m^2 = C(h) \qquad \textbf{Εξίσωση 3-2}$$

Με άλλα λόγια η συνδιακύμανση μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων εξαρτάται μόνο από την απόσταση και διεύθυνση μεταξύ τους, όχι από τη συγκεκριμένη θέση των ίδιων των σημείων. Ιδιαίτερα, όταν *h = 0,* η συνδιακύμανση επιστρέφει στην κοινή διακύμανση της *Z(x)*, που επίσης θα πρέπει να είναι σταθερή υπό τις παραδοχές της αδύναμης στασιμότητας.

Η Εσωτερική Υπόθεση

Στην πράξη, συχνά οι παραδοχές της αδύναμης στασιμότητας δεν ικανοποιούνται. Προφανώς, όταν υπάρχει αξιοσημείωτη τάση στον μέσο (για παράδειγμα μια έντονη και συστηματική αύξηση στις περιεκτικότητες κοντά στον πυρήνα ενός κοιτάσματος) η μέση τιμή δεν μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, και έτσι η παραδοχή (1) δεν ισχύει. Ομοίως, υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο ορισμός μιας σταθερής συνδιακύμανσης είναι προβληματικός. Ανατρέξτε στους Journel και Huijbregts (1978) για μια πιο εκτεταμένη συζήτηση.

Έτσι, σε θεωρητική και πρακτική βάση είναι βολικό να μπορούμε να αποδυναμώσουμε ακόμα περισσότερο την υπόθεση στασιμότητας. Υπό την *εσωτερική* *υπόθεση* υποθέτουμε ότι οι αυξήσεις της συνάρτησης είναι αδύναμα στάσιμες. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος και η διακύμανση των αυξήσεων, δηλαδή

$$Z(x+h) - Z(x)$$

είναι ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη θέση του *x*. Η εσωτερική υπόθεση μπορεί να αποδοθεί περιληπτικά ως εξής:

$$\begin{aligned} E[Z(x+h) - Z(x)] &= 0 \\ Var[Z(x+h) - Z(x)] &= 2\gamma(h) \end{aligned}$$ **Εξίσωση 3-3**

Αυτή είναι η εσωτερική υπόθεση με μηδενική μέση αύξηση. Χρησιμοποιώντας την εσωτερική υπόθεση είναι σαν να αποφασίζουμε ότι είναι σωστό να ενώνουμε ζεύγη δειγμάτων, που διαχωρίζονται (περίπου) από το ίδιο διάνυσμα απόστασης, στον χώρο που εξετάζουμε.

Η συνάρτηση $\gamma(h)$ λέγεται *ημιβαριόγραμμα* (συνήθως το λέμε *βαριόγραμμα* για συντομία). Το βαριόγραμμα είναι το βασικό εργαλείο της γεωστατιστικής δομικής ανάλυσης και χρησιμοποιείται για την επικείμενη εκτίμηση. Δεδομένης της σημασίας του στη γεωστατιστική, θα το εξετάσουμε λεπτομερώς σε αυτό και στο επόμενο κεφάλαιο. Όμως πριν προχωρήσουμε, θα συζητήσουμε πρώτα τα πρακτικά στοιχεία της στασιμότητας.

Η Απόφαση της Στασιμότητας

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι η στασιμότητα είναι ιδιότητα του μοντέλου, και όχι του φαινομένου που εξετάζουμε. Ακόμα, η ορθότητα της απόφασης να υποθέσουμε τη στασιμότητα στο μοντέλο μας δεν μπορεί να εξακριβωθεί εκ των προτέρων. Η απόφαση της στασιμότητας είναι μια απόφαση που κάνουμε στηριζόμενοι σε όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες, για παράδειγμα:

- Τη γεωλογική ζωνοποίηση
- Τις περιοχές αποσάθρωσης
- Τις υποθέσεις για ζώνες 'ομογενούς' μεταλλοφορίας, κλπ.

Η απόφαση της στασιμότητας είναι λοιπόν μια 'απόφαση εμπειρογνώμονα στηριγμένη σε υποθέσεις για την ομοιογένεια των ζωνών στις οποίες πρόκειται να υπολογίσουμε μέσους όρους' (Journel, 1987).

Σημειώστε επίσης ότι σε πρακτικές εκτιμήσεις, το βαριόγραμμα χρησιμοποιείται μόνο έως κάποια απόσταση. Αυτό το όριο είναι γενικά η διάμετρος περιοχής ανίχνευσης που θα χρησιμοποιηθεί στο kriging. Κατά συνέπεια, η στασιμότητα είναι απαραίτητη μόνο για διαστήματα μέχρι αυτήν την απόσταση: ο παραπάνω περιορισμός της υπόθεσης στασιμότητας σε αποστάσεις μικρότερες από αυτήν ονομάζεται η υπόθεση της *ημιστασιμότητας*.

Η αποδοχή της ημιστασιμότητας σημαίνει πως μπορούμε να θεωρήσουμε μια σειρά από μεταφερόμενες γειτονιές στις οποίες ισχύει η στασιμότητα. Έτσι η απόφαση της ημιστασιμότητας εξαρτάται από την κλίμακα.

Το Βαριόγραμμα

Η αρχική βάση της γεωστατιστικής είναι το *βαριόγραμμα*. Το βαριόγραμμα είναι το βασικό διαγνωστικό εργαλείο για τον χωρικό χαρακτηρισμό μιας χωρομεταβλητής και είναι επίσης κεντρικό στη γεωστατιστική εκτίμηση ή της μεθόδους παρεμβολής (*kriging*) και τις πιο προηγμένες μεθόδους της *υπό συνθήκη προσομοίωσης*.

Ορισμός του Βαριογράμματος

Το βαριόγραμμα μιας εσωτερικής τυχαίας συνάρτησης ορίζεται ως εξής:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} Var[Z(x+h) - Z(x)] \qquad \textbf{Εξίσωση 3-4}$$

Επειδή παραδεχτήκαμε στην υπόθεση εσωτερικής στασιμότητας ότι η μέση τάση είναι μηδέν:

$$E[Z(x+h) - Z(x)] = 0 \qquad \textbf{Εξίσωση 3-5}$$

τότε το βαριόγραμμα είναι ίσο με τη μέση τετραγωνική τιμή της διαφοράς:

$$Z(x+h) - Z(x)$$

δηλαδή το βαριόγραμμα μπορεί να οριστεί ως:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\left[\left\{Z(x+h) - Z(x)\right\}^2\right] \qquad \textbf{Εξίσωση 3-6}$$

Στην πράξη, η παρακάτω εξίσωση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του *πειραματικού βαριογράμματος* από τα διαθέσιμα δεδομένα:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \left[\left\{Z(x_i + h) - Z(x_i)\right\}^2\right] \qquad \textbf{Εξίσωση 3-7}$$

Το πειραματικό βαριόγραμμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας *N* ζεύγη δεδομένων. Τα *x* και *x+h* αναφέρονται σε σημεία δεδομένων με θέσεις στο χώρο. Οι θέσεις *x* και *x+h* είναι στο ν-διάστατο χώρο, δηλαδή μπορεί να αναφέρονται σε ν=1, 2 ή 3 διαστάσεις σε μεταλλευτικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, σε μια 2-διάστατη κατάσταση ν=2, οι συντεταγμένες των *x* και *x+h* θα ήταν $\{x_1, x_2\}$ κλπ. Συνεπώς, το διάστημα *h* είναι ένα διάνυσμα σε 2Δ με στοιχεία h_1 και h_2. Σε δύο διαστάσεις, λοιπόν το βαριόγραμμα είναι συνάρτηση των δύο μεταβλητών h_1 και h_2 και το βαριόγραμμα μπορεί να μοντελοποιήσει *ανισοτροπικά* φαινόμενα.

Κύρια Χαρακτηριστικά του Βαριογράμματος

Το γράφημα του *γ(h)* όταν σχεδιάζεται έναντι του διαστήματος *h* συνήθως παρουσιάζει τα παρακάτω χαρακτηριστικά (Σχήμα 3.3):

- Το *γ(h)* είναι μια μη-αρνητική συνάρτηση, δηλαδή *γ(h)* ≥ 0.
- Ξεκινά στο 0 για *h* = 0.
- Γενικά αυξάνει με το *h*.
- Το *γ(h)* μπορεί να αυξάνει μέχρι μια ορισμένη τιμή του *h* (που ονομάζεται *οριακή τιμή*) και μετά οριζοντιώνεται, δηλαδή σταθεροποιείται.
- Εναλλακτικά, το *γ(h)* μπορεί να συνεχίσει να αυξάνει για αυξανόμενα διαστήματα *h*.

Το Σχήμα 3.3 δίνει τα περισσότερα στοιχεία του βαριογράμματος που είναι σημαντικά από την άποψη της *δομικής ανάλυσης*. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικά από αυτά.

Εύρος και ‘Ζώνη Επιρροής’

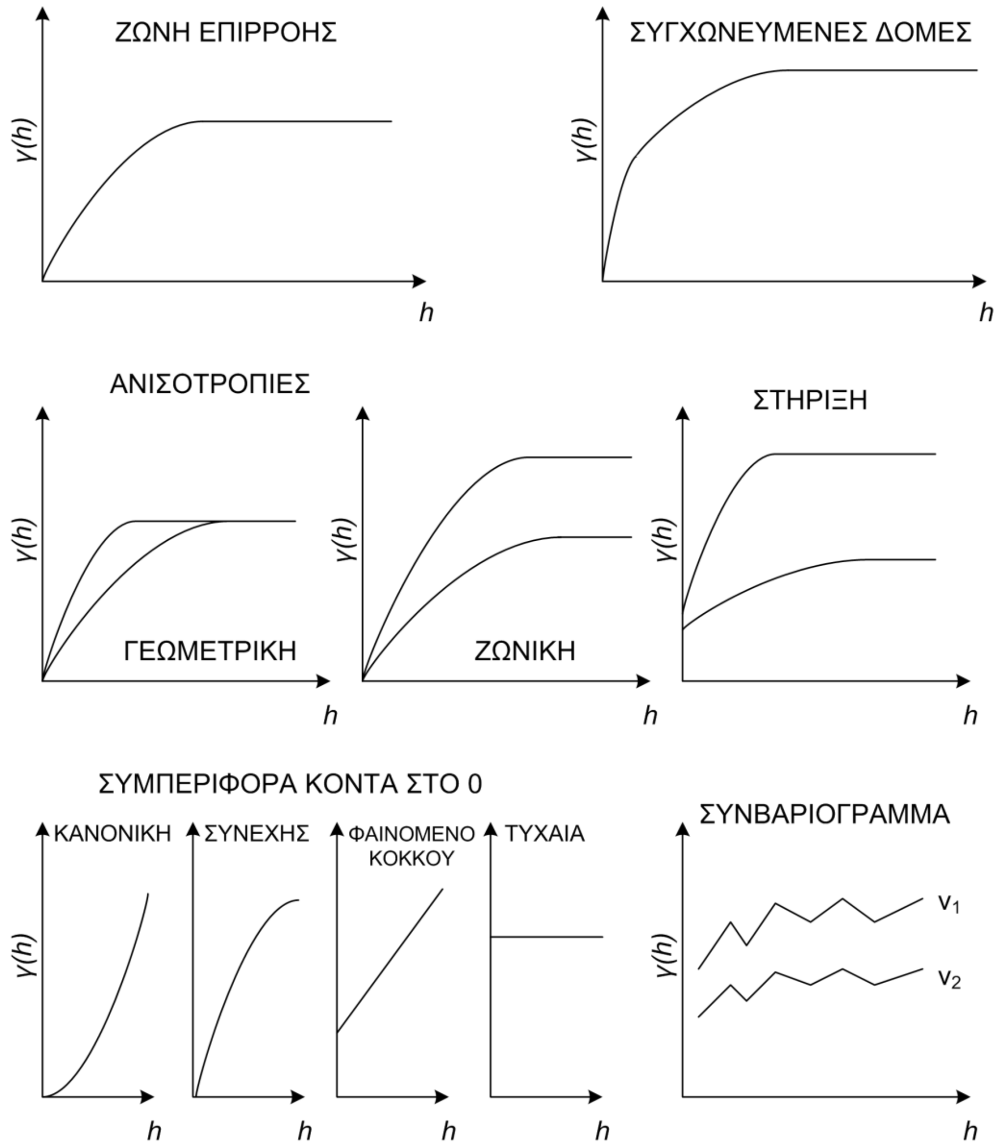
Ο ρυθμός αύξησης του βαριογράμματος με την αύξηση του *h* είναι ενδεικτικός του πόσο γρήγορα μειώνεται η ‘επιρροή’ των δειγμάτων με την απόσταση. Μάλιστα, το *γ(h)* δίνει μια ακριβή σημασία στη συμβατική ιδέα της ‘ζώνης επιρροής’ μιας τιμής.

Σε διαστήματα μικρότερα από την απόσταση στην οποία το βαριόγραμμα βρίσκει την οριακή τιμή του τα δείγματα εμφανίζουν κάποιο βαθμό χωρικού συσχετισμού. Πέρα από αυτήν την απόσταση, τα δείγματα δεν συσχετίζονται χωρικά. Το διάστημα στο οποίο υπάρχει μια μετάβαση από χωρικό συσχετισμό σε έλλειψη αυτού ονομάζεται *εύρος*. Το εύρος συνήθως συμβολίζεται με το γράμμα *α* στη γεωστατιστική.

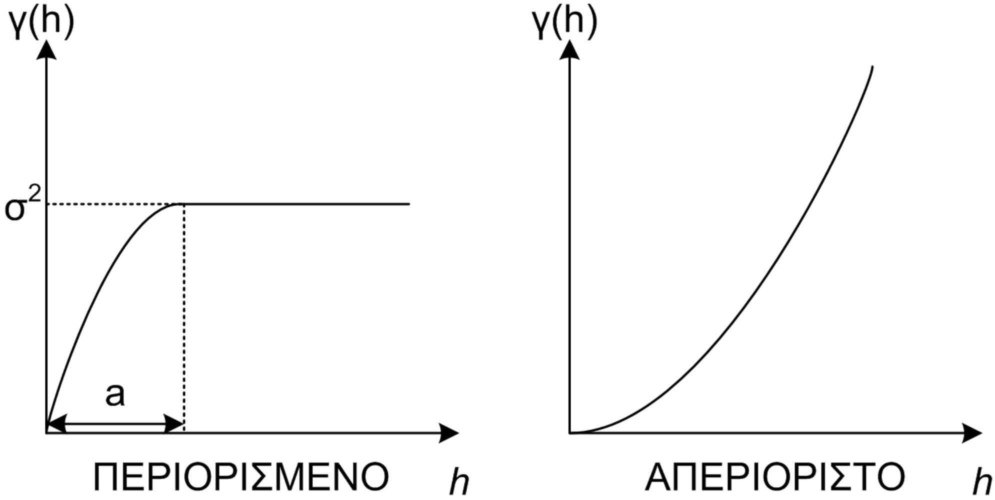
Βαριογράμματα τα οποία έχουν εύρος αναφέρονται ως μεταβατικά βαριογράμματα ή περιορισμένα βαριογράμματα. Τα φαινόμενα τα οποία περιγράφονται από τέτοια βαριογράμματα ονομάζονται μερικές φορές *μεταβατικά φαινόμενα.* Δεν συμβαίνει για όλα τα βαριογράμματα να φτάνουν μια οριακή τιμή, και έτσι δεν μπορούμε να πούμε ότι όλα τα βαριογράμματα έχουν ένα εύρος. Τα βαριογράμματα αυτά είναι *μη-μεταβατικά* ή *απεριόριστα*. Το Σχήμα 3.4 δείχνει την αντίθεση ανάμεσα στα μεταβατικά και μη-μεταβατικά βαριογράμματα.

Θεωρητικά, η οριακή τιμή του *γ(h)* είναι ίση με τη διακύμανση του πληθυσμού των δειγμάτων που χρησιμοποιούνται. Στην πραγματικότητα, όταν ο συσχετισμός μεταξύ *Z(x)* και *Z(x+h)* εξαφανίζεται, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \frac{1}{2}Var\left[Z(x+h)-Z(x)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left\{Var\left[Z(x+h)\right]+Var\left[Z(x)\right]\right]\right\}\\ &= \frac{1}{2}\times 2\times Var\left[Z(x)\right]\\ &= \frac{2\sigma^2}{2}=\sigma^2\end{aligned}$$



Σχήμα 3.3: Κύρια χαρακτηριστικά του βαριογράμματος.



Σχήμα 3.4: Περιορισμένα και απεριόριστα ή μεταβατικά και μη-μεταβατικά βαριογράμματα.

Ορίζοντας το βαριόγραμμα ως τη μισή μέση τετραγωνισμένη διαφορά επιβεβαιώνει την παραπάνω αντιστοιχία με τη διακύμανση. Όταν το βαριόγραμμα είναι περιορισμένο, σχετίζεται με τη συνάρτηση συνδιακύμανσης ως εξής:

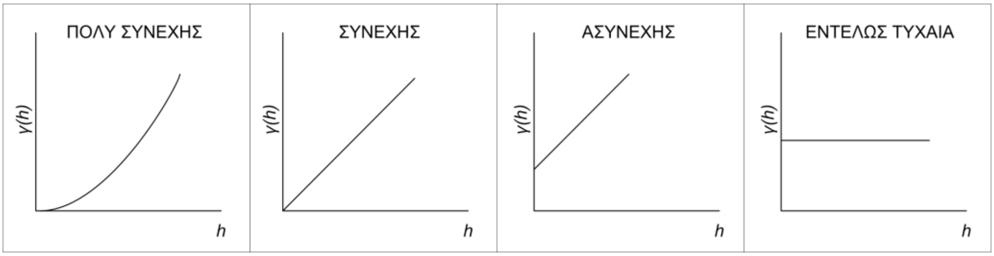
$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \qquad \textbf{Εξίσωση 3-8}$$

Σημειώστε επίσης ότι το εύρος δεν χρειάζεται να είναι το ίδιο για όλες τις διευθύνσεις που εξετάζονται. Το στοιχεία αυτό του εύρους είναι η *ανισοτροπία*, που θα εξετάσουμε ξεχωριστά παρακάτω.

Μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα εύρη σε μια δοσμένη διεύθυνση. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για *ένθετες δομές* που αντικατοπτρίζουν διακριτούς χωρικούς συσχετισμούς ενεργούς σε διαφορετικές κλίμακες. Και πάλι, θα τα εξετάσουμε όλα αυτά παρακάτω.

Συμπεριφορά Κοντά στην Αρχή

Η συμπεριφορά του βαριογράμματος κοντά στην αρχή, δηλαδή για πολύ μικρά διαστήματα, αποδίδει την κανονικότητα και συνέχεια της ίδιας της χωρομεταβλητής. Διαφορετικοί τύποι συμπεριφοράς δίνονται στο Σχήμα 3.5 και θα αναλυθούν εδώ.



Σχήμα 3.5: Συμπεριφορά του βαριογράμματος κοντά στην αρχή.

1. Πολύ Συνεχής

Η παραβολική συμπεριφορά κοντά στην αρχή είναι χαρακτηριστική εξαιρετικά συνεχούς μικρού εύρους κανονικότητας. Ένα φυσικό παράδειγμα μπορεί να είναι η μεταβλητή 'το υψόμετρο μιας πολύ ομαλής, ελαφρά κυματώδους τοπογραφικής επιφάνειας'. Στην περίπτωση αυτή περιμένουμε οι κοντινές τιμές να είναι, κατά μέσο όρο, *πολύ* όμοιες (ουσιαστικά οι ίδιες), και έτσι εμφανίζεται το παραβολικό σχήμα.

Τα βαριογράμματα αυτού του τύπου για μεταβλητές περιεκτικότητας σε μεταλλευτικές εφαρμογές είναι τόσο σπάνια έως σχεδόν ανύπαρκτα. Ακόμα και πιο κανονικές μεταλλευτικές μεταβλητές όπως το πάχος μιας φλέβας δεν οδηγούν σε τέτοια συνεχή μικρού εύρους συμπεριφορά. Σημειώστε ότι η παραβολική συμπεριφορά κοντά στην αρχή μπορεί επίσης να συσχετισθεί με την παρουσία μιας τάσης όπως θα δούμε παρακάτω.

2. Συνεχής

Η γραμμική συμπεριφορά του *γ(h)* κοντά στην αρχή είναι ενδεικτική μέτριας συνέχειας μικρού εύρους. Η συνέχεια είναι έντονα μικρότερη από την παραβολική συμπεριφορά. Μερικά κοιτάσματα βασικών μετάλλων εμφανίζουν αυτόν τον τύπο βαριογράμματος, συνήθως όμως με παρουσία *φαινόμενου ψήγματος*.

3. Ασυνεχής

Εδώ είναι που το *γ(h)* δεν τείνει στο μηδέν όταν το *h* τείνει στο μηδέν. Η ασυνεχής συμπεριφορά κοντά στην αρχή δείχνει μια ιδιαίτερα ασυνεχή συμπεριφορά της χωρομεταβλητής σε μικρές αποστάσεις. Οι περισσότερες γεωλογικές μεταβλητές, ειδικά οι περιεκτικότητες, εμφανίζουν τέτοια συμπεριφορά.

Το κλασικό παράδειγμα είναι η συμπεριφορά των αναλύσεων χρυσού σε μικρές αποστάσεις λόγω της φυσικής κατανομής του Au σε ψήγματα, όπως σημειώνουν οι γεωλόγοι χρυσού για πολλά χρόνια. Συνεπώς, ο όρος *φαινόμενο ψήγματος* εφαρμόστηκε για να περιγράψει αυτό το απότομο άλμα στην αρχή.

Στο παράδειγμα του χρυσού, η περιεκτικότητα περνά απότομα από υψηλές σε χαμηλές τιμές λόγω της παρουσίας ή απουσίας φυσικών ψηγμάτων Au. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να είναι εμφανές σε κλίμακες μικρές όσο η διάμετρος του πυρήνα μιας γεώτρησης, όπως θα γνωρίζουν οι γεωλόγοι που αναλύουν δυο μισά από έναν κομμένο πυρήνα από ένα κοίτασμα χρυσού!

Λιγότερο παράξενη – αλλά ακόμα αρκετά ασυνεχής – συμπεριφορά σε μικρά εύρη μπορεί να εμφανιστεί από μια μεταλλοφορία όπου δεν παρουσιάζονται τόσο έντονα φυσικά ψήγματα. Παράδειγμα είναι τα υδροθερμικά κοιτάσματα κασσίτερου και πολλοί τύποι μεταλλοφορίας ουράνιου. Η παρουσία μικρορηγμάτων, κλπ μπορεί επίσης να οδηγήσει σε μια απότομη ασυνέχεια στην αρχή.

Το εμφανές φαινόμενο ψήγματος είναι ευαίσθητο στο διάστημα της δειγματοληψίας, και έτσι ένα μειωμένο διάστημα μπορεί να λύσει μια δομή μικρού εύρους και να μειώσει το παρατηρούμενο φαινόμενο ψήγματος. Είναι βολικό (και συμβατικό) να χρησιμοποιούμε τον όρο ‘ψήγμα’ για μικρού εύρους ασυνεχή συμπεριφορά του *γ(h)* ακόμα και όταν γνωρίζουμε ότι οφείλεται σε κάποιον άλλο παράγοντα. Για παράδειγμα, τα σφάλματα δειγματοληψίας ή μέτρησης, τα σφάλματα τοποθέτησης και οι άλυτες μικροδομές μπορούν όλα να είναι υπεύθυνα για το φαινόμενο ψήγματος.

4. Τυχαία Συμπεριφορά

Το οριζόντιο γράφημα του *γ(h)* δείχνει ακραία ασυνέχεια της χωρομεταβλητής. Ισοδυναμεί με πλήρη τυχαιότητα, χαοτική συμπεριφορά των τιμών ή ‘λευκό θόρυβο’. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένα φαινόμενο ψήγματος 100% και κανένας συσχετισμός σε οποιοδήποτε διάστημα που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του βαριογράμματος.

Στην περίπτωση ενός τέτοιου οριζόντιου βαριογράμματος, οι χωρομεταβλητές *Z(x)* και *Z(x+h)* δεν συσχετίζονται για όλες τις τιμές του *h*, άσχετα από το πόσο κοντά είναι. Αυτή είναι η οριακή περίπτωση ολικής έλλειψης χωρικής δομής. Σημειώστε ότι, για άλλη μια φορά, αυτός ο τύπος συμπεριφοράς είναι ιδιαίτερα ευαίσθητος στο διάστημα των δειγμάτων.

Ανισοτροπία

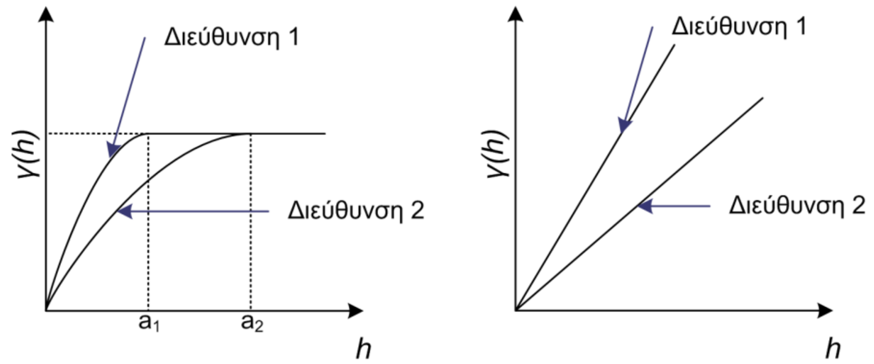
Η ανισοτροπία παρουσιάζεται όταν υπάρχουν διαφορές στη συμπεριφορά του βαριογράμματος όταν υπολογίζεται σε διαφορετικές διευθύνσεις. Για παράδειγμα, μπορούμε να υπολογίσουμε το πειραματικό βαριόγραμμα στη διεύθυνση Βορράς-Νότος και επίσης Ανατολή-Δύση. Ένα ουσιαστικά διαφορετικό σχήμα για τα δύο αυτά βαριογράμματα συνιστά ανισοτροπία.

Η απουσία ανισοτροπίας οδηγεί σε βαριογράμματα που έχουν ουσιαστικά το ίδιο σχήμα, άσχετα από τη διεύθυνση υπολογισμού. Στην περίπτωση αυτή το βαριόγραμμα εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της απόστασης μεταξύ των δειγμάτων. Τέτοια συμπεριφορά ονομάζεται ισοτροπική. Υπάρχουν δυο είδη ανισοτροπίας (Σχήμα 3.6):

1. Γεωμετρική Ανισοτροπία

Η γεωμετρική ανισοτροπία συχνά ονομάζεται και ‘ελλειπτική ανισοτροπία’ και μπορεί να διορθωθεί από έναν απλό γραμμικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων. Με άλλα λόγια, εάν το βαριόγραμμα σε μια διεύθυνση μπορεί να μετασχηματισθεί σε εκείνο μιας οποιαδήποτε άλλης αλλάζοντας την κλίμακα στον άξονα του *h*, τότε έχουμε μια γεωμετρική ανισοτροπία.

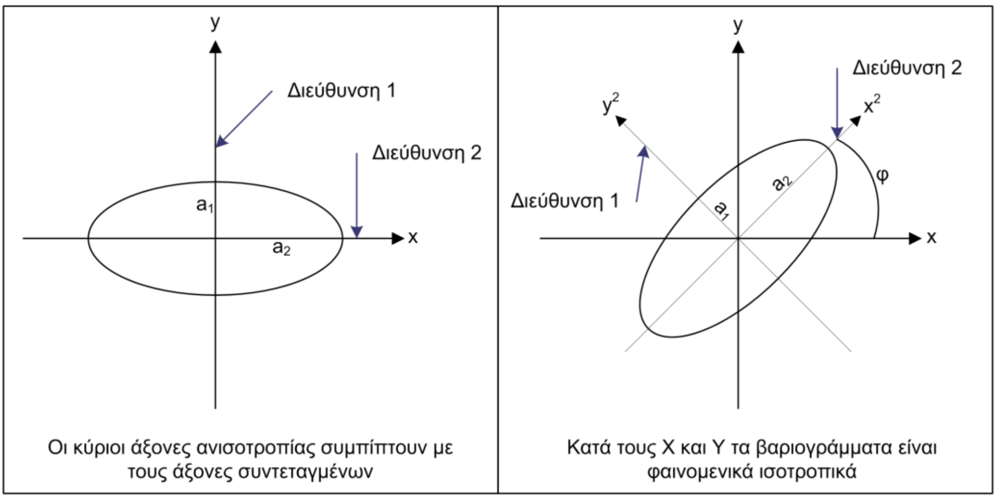
Σημειώστε ότι, στην περίπτωση γεωμετρικής ανισοτροπίας, για ένα μεταβατικό βαριόγραμμα, οι οριακές τιμές των βαριογραμμάτων σε κάθε διεύθυνση είναι ίδιες. Μόνο το εύρος διαφέρει. Στην περίπτωση ενός γραμμικού βαριογράμματος είναι η κλίση που διαφέρει διευθυντικά.



Σχήμα 3.6: Γεωμετρική ανισοτροπία περιορισμένων και απεριόριστων περιπτώσεων.

Μπορούμε να σχηματίσουμε το εύρος (ή την κλίση, στην περίπτωση γραμμικού βαριογράμματος) ως συνάρτηση της διεύθυνσης (Σχήμα 3.7). Για γεωμετρική ανισοτροπία, το διάγραμμα θα προσεγγίσει μια έλλειψη (σε 2Δ, ένα ελλειψοειδές σε 3Δ). Μια απλή αλλαγή στις συντεταγμένες μετασχηματίζει την έλλειψη σε έναν κύκλο, εξαφανίζοντας την ανισοτροπία.

Σημειώστε ότι, όταν υπολογίζουμε το πειραματικό βαριόγραμμα είναι σημαντικό να επιλέξουμε τουλάχιστο τέσσερις διευθύνσεις. Αυτό γιατί επιλέγοντας μόνο δυο μπορεί να μην επιτρέψει την ανίχνευση της γεωμετρικής ανισοτροπίας, ακόμα και αν αυτή υπάρχει (Σχήμα 3.7).

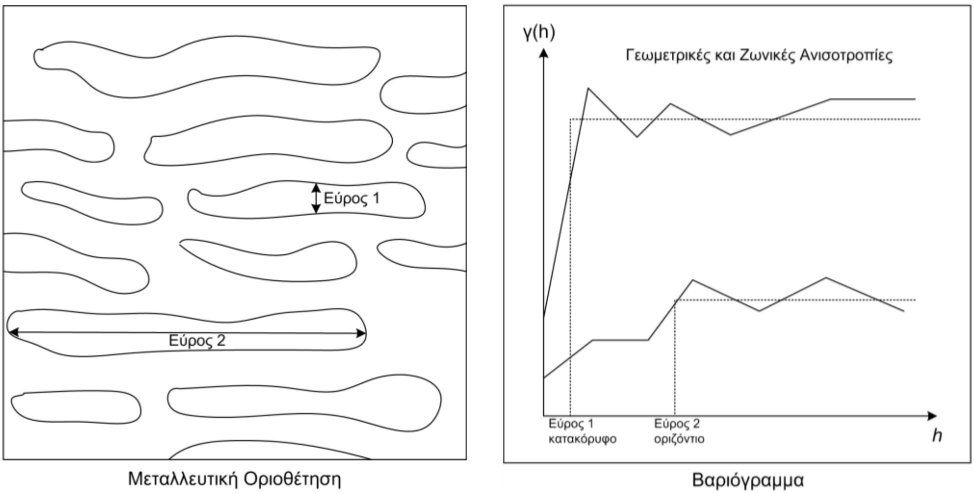


Σχήμα 3.7: Γεωμετρική ανισοτροπία – προσοχή στην ψευδο-ισοτροπία!

2. Ζωνική Ανισοτροπία

Υπάρχουν πιο πολύπλοκες μορφές ανισοτροπίας σε μερικά κοιτάσματα. Ένα παράδειγμα είναι η περίπτωση όπου υπάρχει διακριτή ζωνοποίηση υψηλών και χαμηλών τιμών (για παράδειγμα ένας έλεγχος στη μεταλλοφορία που είναι υπο-παράλληλος στις πλευρές ή το πάτωμα ενός κοιτάσματος). Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητότητα στη διεύθυνση παράλληλη σε αυτήν της ζωνοποίησης μπορεί να είναι σημαντικά χαμηλότερη από τη διεύθυνση κάθετα στη ζωνοποίηση. Η ιδέα αυτή δόθηκε στο Σχήμα 3.3. Το είδος της ανισοτροπίας αυτής ονομάζεται ζωνική ανισοτροπία.

Ένα άλλο κοινό παράδειγμα ζωνικής ανισοτροπίας είναι στην περίπτωση των στρωματογραφικών κοιτασμάτων (π.χ. σιδήρου, άνθρακα, λατεριτικού νικελίου κλπ) όπου η κατακόρυφη μεταβολή (ή γενικότερα, ορθογωνικά στην επιφάνεια των στρωμάτων) είναι υψηλότερη απ' ότι κατά μήκος των στρωμάτων. Για το λόγο αυτό, η ζωνική ανισοτροπία αναφέρεται μερικές φορές, αν και λιγότερο συχνά, ως στρωματογραφική ανισοτροπία. Το Σχήμα 3.8 δίνει την ιδέα της ανισοτροπίας και της 'ζώνης επιρροής'.



Σχήμα 3.8: Ανισοτροπία και 'ζώνη επιρροής'.

Παρουσία Τάσης

Θεωρητικά ισχύει ότι για υψηλές τιμές του *h*, το *γ(h)* πρέπει να αυξάνει πιο αργά από μια παραβολή. Πιο συγκεκριμένα:

$$\frac{\gamma(h)}{h^2} \rightarrow 0 \text{ καθώς } h \rightarrow \infty$$

Στην πράξη, βλέπουμε βαριογράμματα που αυξάνουν πιο γρήγορα από το h^2. Αυτό είναι ένδειξη της παρουσίας τάσης. Το Σχήμα 3.9 δίνει ένα σχετικό παράδειγμα. Το πειραματικό βαριόγραμμα που υπολογίζουμε:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left\{Z(x_i + h) - Z(x_i)\right\}^2\right]$$

μας δίνει μια εκτίμηση του γενικού βαριογράμματος:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}E\left[\left\{Z(x+h) - Z(x)\right\}^2\right]$$

$$\underset{\text{(μέσο τετράγωνο)}}{E\left[\left\{Z(x+h) - Z(x)\right\}^2\right]} = \underset{\text{(διακύμανση)}}{Var\left[Z(x+h) - Z(x)\right]} + \underset{\text{(σφάλμα)}^2}{E\left[\left\{Z(x+h) - Z(x)\right\}\right]^2}$$

Έτσι έπεται ότι:

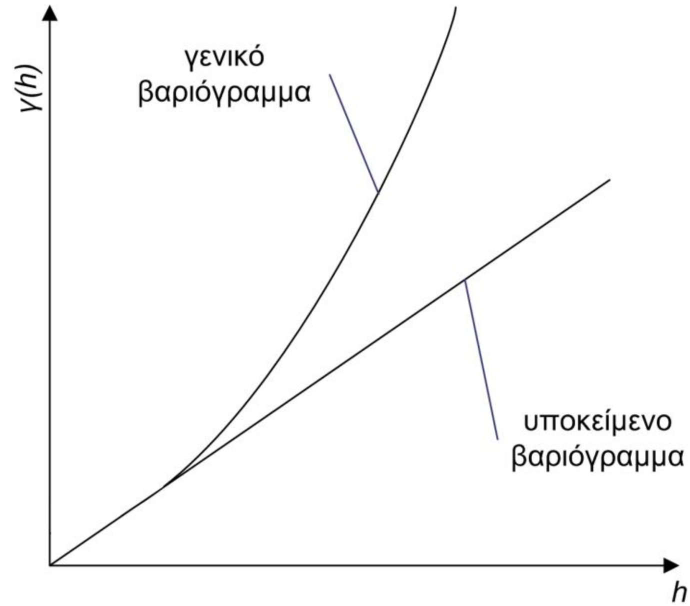
$$\begin{aligned}\gamma(h)_{\gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{o}} &= \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\left\{\mathrm{Z}(x+h) - \mathrm{Z}(x)\right\}^2\right] \\ &= \gamma(h)_{\upsilon\pi o\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu o} + \left[m(x+h) - m(x)\right]^2\end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 3-9}$$

Αυτό δείχνει ότι όταν υπάρχει τάση (δηλαδή ο μέσος των διαστημάτων δεν ισούται με μηδέν) το πειραματικό βαριόγραμμα $\hat{\gamma}(h)$, το οποίο εκτιμά το γενικό βαριόγραμμα, είναι πάντα ένας θετικά εσφαλμένος εκτιμητής του πραγματικού ή υποκείμενου βαριογράμματος. Εξαιτίας αυτού του τετραγωνισμένου όρου σφάλματος, στην περίπτωση γραμμικής τάσης, φαίνεται ότι ο τετραγωνικός όρος $0.5\alpha^2h^2$ (μια παραβολή) προστίθεται στο υποκείμενο βαριόγραμμα:

$$\gamma(h)_{\gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{o}} = \gamma(h)_{\upsilon\pi o\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu o} + \alpha^2 h^2 \qquad \textbf{Εξίσωση 3-10}$$

Το γενικό βαριόγραμμα συμπίπτει με το πραγματικό ή υποκείμενο βαριόγραμμα όταν τα διαστήματα έχουν μηδενικό μέσο, αλλιώς:

> Για μικρές τιμές του *h* (δηλαδή μικρές αποστάσεις) η επίδραση αυτού του όρου είναι αρκετά μικρή, ενώ για μεγάλες αποστάσεις, μπορεί να γίνει ο κυρίαρχος όρος στο γενικό βαριόγραμμα, και έτσι βλέπουμε μια απότομη ανάπτυξη του πειραματικού βαριογράμματος.
>
> Οι εκτοπίσεις δεν είναι πάντα γραμμικές. Η μη-γραμμική τάση είναι πιο πολύπλοκη και δυσκολότερη στο να ληφθεί υπόψη. Αυτό συμβαίνει γιατί ο όρος του σφάλματος *m(x+h)-m(x)* τώρα εξαρτάται όχι μόνο από το *h* αλλά και από το *x*, όπως και το γενικό βαριόγραμμα εφόσον οι αυξήσεις δεν είναι πλέον στάσιμες.



Σχήμα 3.9: Γενικό και υποκείμενο βαριόγραμμα (γραμμική τάση).

Αναλογικό Φαινόμενο

Ένα αναλογικό φαινόμενο υπάρχει όταν υπάρχει σχέση μεταξύ τοπικού μέσου και της αντίστοιχης τοπικής διακύμανσης. Ο συνήθης έλεγχος για το αναλογικό φαινόμενο είναι να εξετάσουμε τα δεδομένα σε περίπου ίσες ομάδες και να υπολογίσουμε τον μέσο και τη διακύμανση σε κάθε μια από αυτές. Σε ένα κοίτασμα, για παράδειγμα, μπορεί να το διαιρέσουμε σε τετράγωνα ή λωρίδες, χρησιμοποιώντας κινητά παράθυρα ή να επιλέξουμε ξεχωριστές γεωτρήσεις ως τη μονάδα ομαδοποίησης. Είναι σημαντικό αυτές οι ομάδες να έχουν περίπου το ίδιο μέγεθος και σχήμα και να περιέχουν, κατά μέσο όρο, τον ίδιο αριθμό δειγμάτων. Ο αριθμός των δειγμάτων σε κάθε μια θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος ώστε να εκτιμηθεί ο μέσος και η διακύμανση (ας πούμε, περισσότερα από 20).

Σχεδιάζουμε τον τετραγωνισμένο μέσο έναντι της διακύμανσης (ή ισοδύναμα, τον μέσο έναντι της τυπικής απόκλισης). Εάν γίνεται προφανής μια σχέση, λέμε ότι υπάρχει αναλογικό φαινόμενο. Ένα αναλογικό φαινόμενο είναι γενικά παρών για λογαριθμικά κατανεμημένες τιμές, και συχνά για άλλες λοξές κατανομές, για παράδειγμα στα κοιτάσματα χρυσού.

Ένα βαριόγραμμα λέγεται να έχει αναλογικό φαινόμενο όταν η τιμή *γ(h)* είναι αναλογική της τοπικής μέσης περιεκτικότητας. Στην περίπτωση αυτή, τα βαριογράμματα διαφορετικών ζωνών έχουν το ίδιο σχήμα, αλλά διαφορετικές οριακές τιμές. Η οριακή τιμή των βαριογραμμάτων που υπολογίζονται σε πλούσιες ζώνες θα είναι υψηλότερη από αυτήν των φτωχότερων ζωνών. Συχνά συμβαίνει η οριακή τιμή να είναι ανάλογη στο τετράγωνο του τοπικού μέσου. Το υποκείμενο βαριόγραμμα στην περίπτωση αυτή μπορεί να βρεθεί διαιρώντας τα τοπικά βαριογράμματα με το τετράγωνο του τοπικού μέσου και στη συνέχεια βρίσκοντας τη μέση τιμή τους πριν προσαρμόσουμε κάποιο μοντέλο (αυτό θα εξετασθεί με λεπτομέρεια στο επόμενο κεφάλαιο).

Ένθετες Δομές

Οι ένθετες ή συνδυασμένες δομές δείχνουν την παρουσία ενός χωρικού συσχετισμού σε διαφορετικές κλίμακες. Αυτές οι διαφορετικές κλίμακες μεταβολής επικαλύπτονται. Το Σχήμα 3.10 δείχνει ένα βαριόγραμμα με ξεκάθαρα ένθετες δομές και μια ιδέα των γεωμετρικών συνεπειών αυτού.

Σχήμα 3.10: Ένθετες δομές, περιοδικότητα και φαινόμενο οπής.

Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε τρεις διαφορετικές κλίμακες μεταβολής σε μια εμφάνιση:

- Για πολύ μικρές κλίμακες ($h \rightarrow 0$), ή πιο αυστηρά, σε αποστάσεις μικρότερες από ένα ελάχιστο διάστημα δειγμάτων, υπάρχει ένα φαινόμενο ψήγματος.
- Σε σχετικά μικρά εύρη, για πολλά διαστήματα, μπορεί να υπάρχει μια χωρική δομή μικρού εύρους που αποδίδει κατανομή μεταλλοφορίας σε ‘ράβδους’ ή άλλη συγκέντρωση υψηλών περιεκτικοτήτων. Αυτό οδηγεί σε μια διακριτή δομή με εύρος αντίστοιχο στη μέση διάσταση των ράβδων στη διεύθυνση του υπολογισμού του βαριογράμματος.
- Σε μεγαλύτερες αποστάσεις μπορεί να υπάρχει μια δομή με εύρος που καθορίζεται από τις συνολικές διαστάσεις της μεταλλοφόρου ζώνης. Αυτή η δομή σχετίζεται με δείγματα που περνούν από μετάλλευμα σε στείρα, δηλαδή το εύρος σχετίζεται με τη μέση μέγιστη απόσταση μεταξύ ζευγών δειγμάτων εντός της ζώνης του μεταλλεύματος.

Φαινόμενο Οπής

Σε μερικές περιπτώσεις, παρατηρούμε μια αναπήδηση στο βαριόγραμμα. Αυτό θα αντιστοιχούσε σε μια τρύπα στη συνδιακύμανση, και έτσι προκύπτει η ονομασία φαινόμενο οπής. Το Σχήμα 3.10 δίνει ένα παράδειγμα.

Σε πολλές περιπτώσεις, ένα εμφανές φαινόμενο οπής είναι το αποτέλεσμα έλλειψης δειγμάτων για κάποια διαστήματα ή άλλες μεταβολές και ανωμαλίες του πειραματικού βαριογράμματος (το οποίο, όπως έχουμε πει, είναι μια εκτίμηση του πραγματικού βαριογράμματος). Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα εμφανή φαινόμενα οπής μπορούν, και θα πρέπει να αγνοηθούν εκτός εάν υπάρχει κάποια λογική εξήγηση διαθέσιμη.

Το κλασικό παράδειγμα ενός φαινομένου οπής με καλή φυσική εξήγηση είναι αυτό της αρχικής μελέτης του Serra σε λεπτές φέτες ωολιθικού σιδήρου από ένα Γαλλικό κοίτασμα σιδήρου. Σε αυτήν την περίπτωση, ο Serra βρήκε ότι κρύσταλλοι ασβεστίτη έτειναν να διαχωρίζονται σε διαστήματα περίπου ανάλογα του μεγέθους τους, ίσως λόγω της απόθεσης του ασβεστίτη γύρω από τυχαία τοποθετημένες θέσεις.

Υπάρχουν και άλλα παραδείγματα, όπου υπάρχει φαινόμενο οπής που εξηγείται φυσικά. Ο Hohn (1988) δίνει την περίπτωση ενός φαινομένου οπής για βαριογράμματα στην κορυφή μιας πτυχωμένης ιζηματογενούς επιφάνειας. Βλέπουμε επίσης φαινόμενα οπής να δημιουργούνται από έντονες περιοδικές ζωνώσεις των περιεκτικοτήτων. Ο David (1977) δίνει το παράδειγμα του μεταλλοφόρου σώματος Prince Lyell στο Queenstown της Tasmania, όπου το μετάλλευμα βρίσκεται σε μια σειρά από διακριτούς φακούς υψηλής περιεκτικότητας, χωρισμένους από υλικό χαμηλής περιεκτικότητας και όπου παρατηρήθηκε έντονο φαινόμενο οπής.

Παρόλα αυτά, τα πραγματικά φαινόμενα οπής δεν είναι πολύ κοινά στην πράξη, και θα πρέπει κανείς να είναι προσεκτικός με τα φαινομενικά φαινόμενα οπής.

Περιοδικότητα

Εάν τα φαινόμενα οπής είναι σπάνια, τότε η πραγματική περιοδικότητα είναι ουσιαστικά ανήκουστη. Στη θεωρία, ένα πολύ κανονικά διαχωρισμένο σύμπλεγμα ζωνών υψηλής και χαμηλής περιεκτικότητας πολύ όμοιου πλάτους μπορεί να οδηγήσει σε ένα περιοδικό βαριόγραμμα.

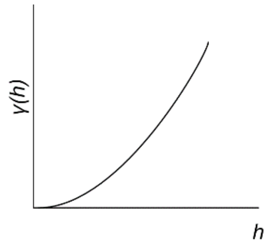
Είναι επίσης δύσκολο να βρει κανείς γεωλογικές μεταβλητές που να ικανοποιούν αυτά τα κριτήρια του ιδιαίτερα κανονικού συμπλέγματος ώστε η παρατηρούμενη περιοδικότητα θα πρέπει γενικά να θεωρείται ως ένα στατιστικό κατασκεύασμα που δημιουργείται, για παράδειγμα από τη χρήση ή εξαίρεση ακραίων τιμών σε συγκεκριμένα διαστήματα.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι μερικά μη-μεταλλευτικά παραδείγματα θα μπορούσαν να παράγουν πραγματικά περιοδικά βαριογράμματα, για παράδειγμα μερικές φυσικές ή γεωχημικές μεταβλητές σχετικές με ένα σπάνιο κοίτασμα αργίλου (ιδιαίτερα κανονικά λεπτά διαστρωματικά κοιτάσματα αργίλου από το ετήσιο λιώσιμο των παγετώνων).

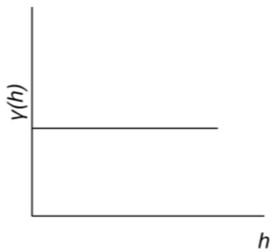
Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Είναι η συνέχεια της χωρομεταβλητής που εξετάζεται σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει την ποιότητα της εκτίμησης;
2. Η δομική ανάλυση οδηγεί σε ένα μοντέλο της χωρικής μεταβλητότητας. Για ποιους σκοπούς χρησιμοποιείται το μοντέλο αυτό (στόχοι της δομικής ανάλυσης);
3. Ποιες είναι οι παραδοχές τις στασιμότητας 2^{ου} βαθμού και πως διαφέρουν από αυτές τις εσωτερικής υπόθεσης;
4. Ποια είναι τα κύρια χαρακτηριστικά του βαριογράμματος;

5. Ποια είναι η εξίσωση του πειραματικού βαριογράμματος; Το πειραματικό βαριόγραμμα δίνει τιμή βαριογράμματος για κάθε απόσταση ή όχι;
6. Τι είναι η γεωμετρική ανισοτροπία του βαριογράμματος;
7. Μπορεί ένα βαριόγραμμα να μην εμφανίζει οριακή τιμή; Πως ονομάζονται αυτά τα βαριογράμματα;
8. Μπορεί το βαριόγραμμα να έχει αρνητική τιμή; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.
9. Θα περιμένατε από την περιεκτικότητα ενός μετάλλου να παρουσιάζει την παρακάτω συμπεριφορά; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.



10. Σε ποιες κατηγορίες χωρίζονται τα βαριογράμματα ανάλογα με την ύπαρξη οριακής τιμής;
11. Ποια χαρακτηριστικά συνδυάζουν οι χωρομεταβλητές;
12. Τι γνωρίζετε για το εύρος του βαριογράμματος και τη φυσική του σημασία;
13. Εάν το βαριόγραμμα μιας μεταβλητής παρουσιάζει την παρακάτω συμπεριφορά, είναι δυνατή η τοπική εκτίμηση της; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.



4. ΒΑΡΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η Επιστήμη και η 'Τέχνη' της Βαριογραφίας

Βαριογραφία είναι ο υπολογισμός πειραματικών βαριογραμμάτων και η προσαρμογή κατάλληλων μοντέλων βαριογραμμάτων. Η διαδικασία καθορισμού ενός αποδεκτού και συνεχούς μοντέλου του χωρικού συσχετισμού αναφέρεται επίσης ως *δομική μοντελοποίηση.* Οι γενικές αρχές μοντελοποίησης βαριογραμμάτων θα εξετασθούν με κάποια λεπτομέρεια εδώ, και θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο με ένα παράδειγμα.

Οι Στόχοι της Δομικής Ανάλυσης

Το τελικό αποτέλεσμα της δομικής ανάλυσης είναι ένα κατάλληλο μοντέλο της χωρικής μεταβλητότητας. Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάφορους σκοπούς:

1. Στο χαρακτηρισμό της χωρικής διακύμανσης της μεταλλοφορίας ως μέρος μιας ολοκληρωμένης γεωλογικής μελέτης.
2. Για να διαθέσει τη βάση για μελέτες εκτιμήσεις της διακύμανσης ή την εκτίμηση του διαστήματος δειγματοληψίας (Κεφάλαιο 6).
3. Για να επιτρέψει τη μοντελοποίηση της μεταβολής στη στήριξη – κάτι που απαιτείται για την εκτίμηση συνολικών απολήψιμων αποθεμάτων (Κεφάλαιο 5).
4. Για να ληφθεί μια συνάρτηση βάρους η οποία θα χρησιμοποιηθεί για τη βέλτιστη τοπική εκτίμηση – kriging (Κεφάλαιο 7).
5. Για να χρησιμοποιηθεί ως δομική συνάρτηση στην προσομοίωση κοιτασμάτων.

Σε κάθε περίπτωση θα θέλαμε να προσαρμόσουμε στο πειραματικό βαριόγραμμα ένα μοντέλο που να αιχμαλωτίζει τα κύρια χαρακτηριστικά της χωρικής μεταβλητότητας τα οποία είναι σημαντικά για την εφαρμογή που εξετάζουμε. Θα ανακαλύψουμε πως δεν έχουν όλα τα χαρακτηριστικά του βαριογράμματος ίση σημασία, ανάλογα με τη χρήση που κάνουμε στο μοντέλο βαριογράμματος μας.

Το πως μοντελοποιούμε το βαριόγραμμα έχει σοβαρές συνέπειες όταν εκτιμούμε ή εξομοιώνουμε. Συνεπώς, το έργο του υπολογισμού και εκτίμησης βαριογραμμάτων είναι κεντρικό στην πρακτική εφαρμογή της γεωστατιστικής.

Πρακτικά Στοιχεία μιας Δομικής Ανάλυσης

Η δομική ανάλυση διαμορφώνει τα θεμέλια κάθε γεωστατιστικής μελέτης, είτε για χαρακτηρισμό της περιεκτικότητας, την εκτίμηση, την προσομοίωση, κλπ. Μας ενδιαφέρει ο χαρακτηρισμός της εμφάνισης και επίσης το να πάρουμε ένα μαθηματικά αποδεκτό μοντέλο για το βαριόγραμμα.

Αρχικά Βήματα

Πριν προχωρήσουμε με τη δομική ανάλυση, υπάρχουν μερικά προαπαιτούμενα στοιχεία. Μάλιστα μερικά από αυτά δεν είναι συγκεκριμένα για τη γεωστατιστική προσέγγιση αλλά αποτελούν καλή πρακτική για την εκτίμηση ορυκτών πόρων.

Επαλήθευση Δεδομένων

Η σημασία του ελέγχου και επαλήθευσης δεδομένων δεν μπορεί να τονισθεί αρκετά. Λάθη επικίνδυνων διαστάσεων μπορούν να γίνουν από τα πιο απλά σφάλματα εισαγωγής δεδομένων: για παράδειγμα, η αντιστροφή των τεταγμένων και τετμημένων του κολάρου θα μπορούσε να στείλει μια πλούσια γεώτρηση στη *λάθος* τομή.

Ενώ θα περίμενε κανείς κάτι τέτοιο να μην είναι απαραίτητο να εξηγείται ιδιαίτερα στους επαγγελματίες του κλάδου μας, κάποιοι γεωλόγοι τείνουν να 'εμπιστεύονται' υπερβολικά το τμήμα της συλλογής δεδομένων μιας μηχανογραφημένης εκτίμησης αποθεμάτων. Ο έλεγχος δεδομένων είναι μια δύσκολη εργασία, αλλά μπορεί να ενσωματωθεί στη γενική (και απαραίτητη) διαδικασία της ερμηνείας και γνωριμίας με τα δεδομένα.

Το πρώτο στάδιο είναι η εκτίμηση της ποιότητας των δεδομένων. Αρχικά, θα πρέπει να μάθουμε πως συλλέχθηκαν τα δείγματα (διαστήματα, διαχωρισμός, μάζα δειγμάτων, προετοιμασία και μεθοδολογία ανάλυσης). Συχνά, δεν μπορούμε να τα αλλάξουμε όλα αυτά σε αυτό το προχωρημένο στάδιο, αλλά αν η ακρίβεια της δειγματοληψίας δείχνει προβληματική, είναι σημαντικό να το γνωρίζουμε. Πρέπει επίσης να ξέρουμε τους διάφορους τύπους δειγματοληψίας που έχουν γίνει, και επίσης το ποιες γεωτρήσεις έγιναν με ποιες μεθόδους.

Γνωριμία με τα Δεδομένα

Δίνουμε παρακάτω το περίγραμμα μιας γενικής διαδικασίας ως βοήθημα σε αυτό το μέρος μιας μελέτης εκτίμησης αποθεμάτων:

- Τα διπλά δεδομένα και οι αναλύσεις θα πρέπει να εκτιμηθούν στατιστικά. Τουλάχιστον, θα πρέπει να γίνουν διαγράμματα XY για να κοιτάξουμε για συστηματικά σφάλματα.
- Δημιουργούμε διαγράμματα των γεωτρήσεων που δείχνουν τις αναλύσεις ως τιμές και ως ιστογράμματα. Τουλάχιστον, δημιουργούμε τομές κάθετες και οριζόντιες σε στρατηγικές θέσεις. Εάν είναι δυνατό, δουλεύουμε με πλήρη σετ τομών, κατά μήκος και σε επίπεδο. Και στις κάθετες αλλά και στις οριζόντιες τομές, σχεδιάζουμε την τοπογραφική επιφάνεια κατά τη χρονική στιγμή της γεώτρησης για να ελέγξουμε για σφάλματα στο υψόμετρο των κολάρων.
- Ψάχνουμε για τις πολύ υψηλές τιμές και προσπαθούμε να τις δώσουμε μια γεωλογική ερμηνεία. Πάντα ελέγχουμε τις 20 με 30 υψηλότερες αναλύσεις έναντι των γεωλογικών κορμών και των αρχικών φύλλων των αναλύσεων. Αυτές οι υψηλότερες τιμές (ειδικά σε ένα κοίτασμα χρυσού) θα συνεισφέρουν το περισσότερο από το μέταλλο και έτσι θα επηρεάσουν δυσανάλογα τη βαριογραφία και την υποκείμενη εκτίμηση. Σε μερικές περιπτώσεις (πχ.

κοιτάσματα Fe) οι πολύ χαμηλές τιμές έχουν ένα ανάλογο αποτέλεσμα. Η πιθανότητα σφάλματος δεδομένων (δηλαδή η ανάλυση να είναι λάθος) ή σφάλματος θέσης (η ανάλυση είναι έγκυρη, αλλά όχι στο σωστό μέρος) θα πρέπει να αποκλειστεί. Εάν δεν μπορούμε να ελέγξουμε κάθε ανάλυση τουλάχιστον θα πρέπει να το κάνουμε για εκείνες που θα έχουν το μεγαλύτερο αποτέλεσμα στην εκτίμηση.

- Εάν δεν γνωρίζουμε τη φάση συλλογής δεδομένων για το κοίτασμα στο οποίο δουλεύουμε, βοηθά το να κάνουμε το γράφημα των συντεταγμένων κολάρου με τις ημερομηνίες γεώτρησης (εάν διατίθενται στη βάση δεδομένων). Αυτό μπορεί να δείξει γεωτρήσεις που έγιναν εκτός σειράς και να οδηγήσει στην πηγή πιθανών σφαλμάτων θέσης.
- Ελέγχουμε την όδευση των γεωτρήσεων οι οποίες δείχνουν να έχουν υπερβολικές ή ‘παράξενες’ αποκλίσεις.
- Ψάχνουμε για προφανώς μη δειγματοληπτούμενα διαστήματα και προσπαθούμε να βρούμε το γιατί. Εάν διαστήματα πιθανής μεταλλοφορίας δεν έχουν δείγματα, μπορεί να είναι απαραίτητο να ξανακοιτάξουμε τους πυρήνες ή τις απορρίψεις δειγμάτων.

Ο σκοπός σε αυτό το στάδιο είναι να λάβουμε μια γενική άποψη των δεδομένων σε σχέση με τη γεωλογία για το πρόβλημα που έχουμε: την εκτίμηση αποθεμάτων. Ο λίγος χρόνος που ξοδεύεται σε αυτό το στάδιο μπορεί να οδηγήσει στην αποφυγή του δραστικού βήματος της επανάληψης ολόκληρης της μελέτης εάν αποκαλυφθούν αργότερα σοβαρά λάθη δεδομένων στη διαδικασία εκτίμησης.

Η όλη διαδικασία γίνεται παράλληλα με την επαλήθευση του γεωλογικού μοντέλου. Ένα μέρος της γίνεται με χρήση γραφικών υπολογιστή στις οθόνες, αλλά ο μεγαλύτερος όγκος γίνεται καλύτερα με εκτυπώσεις από τον πλότερ!

Η ποιότητα της γεωστατιστικής μελέτης (ή άλλης εκτίμησης αποθεμάτων) εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από την καλή γνωριμία των δεδομένων. Ο μόνος τρόπος για να την αποκτήσεις είναι να ξοδέψεις αρκετό χρόνο εξετάζοντας τομές και πλάνα.

Εάν το άτομο που είναι υπεύθυνο για την εκτίμηση αποθεμάτων *δεν* είναι ο γεωλόγος του έργου, τότε χρειάζεται κάποιος χρόνος συνομιλίας μεταξύ των γεωλόγων για να λάβουμε μια καλή ιδέα των σημαντικών χαρακτηριστικών του κοιτάσματος *και* της λογικής της εξερεύνησης του, για παράδειγμα:

- Εάν κάποιες περιοχές έχουν προτιμηθεί για δειγματοληψία, γιατί;
- Υπάρχουν συγκεκριμένα στοιχεία και λιθολογίες που να δείχνουν να σχετίζονται στο χώρο με τη μεταλλοφορία;
- Έχει αίσθηση ο γεωλόγος των ζωνών που μπορούν να θεωρηθούν ως στάσιμες όταν υπολογίζουμε το βαριόγραμμα;

Οι γεωλογικές ιδέες για την κατανομή της περιεκτικότητας μπορούν μερικές φορές να επαληθευθούν από τη βαριογραφία. Επειδή η βαριογραφία αποδίδει την πραγματική χωρική κατανομή των περιεκτικοτήτων, μπορεί να είναι ένα πολύ δυνατό ερευνητικό εργαλείο για τον γεωλόγο. Η ένωση γεωλογίας και γεωστατιστικής βελτιώνει και τις δύο αυτές πλευρές της μελέτης.

Κλασική Στατιστική

Μια από τις βασικές παραδοχές στη γεωστατιστική είναι ότι τα δεδομένα προέρχονται από έναν ομοιογενή πληθυσμό. Φυσικά, πολύ λίγα μεταλλοφόρα σώματα είναι ομοιογενή, και μερικές φορές είναι απαραίτητος ο ορισμός διαφορετικών ζωνών. Έτσι είναι βασικό να υπολογίσουμε μερικά απλά στατιστικά πριν συνεχίσουμε στο βήμα της βαριογραφίας. Τα πιο σημαντικά στατιστικά που θα πρέπει να υπολογίσουμε είναι:

- Ο μέσος όρος.
- Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.
- Ο συντελεστής μεταβλητότητας, και *η σχετική τυπική απόκλιση*.
- Το ιστόγραμμα.

Μη-παραμετρικά στατιστικά:

- Ο συσχετισμός μεταξύ ζευγών μεταβλητών εάν το πρόβλημα είναι πολλών μεταβλητών.

Ένα σημαντικό στοιχείο του τι ψάχνουμε να βρούμε όταν εξετάζουμε όλα αυτά τα στατιστικά και τα διαγράμματα είναι η παρουσία και σημασία ακραίων τιμών: τιμών που έχουν ένα σημαντικό αντίκτυπο στη βαριογραφία και κατά συνέπεια, την εκτίμηση.

Όταν εξετάζουμε ιστογράμματα ελέγχουμε να δούμε εάν υπάρχουν πάνω από έναν πληθυσμοί που έχουν αναμειχθεί: θα πρέπει να τους ξεχωρίσουμε εάν είναι δυνατό.

Εάν σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε λογαριθμικές μεθόδους, τότε είναι *υποχρεωτικό* να κάνουμε το ιστόγραμμα σε λογαριθμικό χαρτί πιθανοτήτων. Τέτοιες μέθοδοι είναι συνήθως ιδιαίτερα ευαίσθητες σε αποκλίσεις από τη λογαριθμικότητα, οπότε θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή. Κοιτάμε για πολύ υψηλές τιμές. Μια σειρά από 20 με 30 υψηλές τιμές μπορεί να δημιουργηθεί από τα περισσότερα σύγχρονα λογισμικά, επιτρέποντας μας να βρούμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες σε τομές και πλάνα πολύ γρήγορα.

Η δημιουργία γραφημάτων για τον έλεγχο της παρουσίας αναλογικού φαινομένου είναι επίσης χρήσιμη. Εάν δεν έχουμε το απαραίτητο λογισμικό για να υπολογίσουμε στατιστικά ‘κινητού παράθυρου’, μπορούμε να διαιρέσουμε το κοίτασμα σε συγκεκριμένα μπλοκ, το καθένα με περισσότερα από 20 δείγματα, και να δούμε εάν ο μέσος όρος του μπλοκ σε σχέση με την τυπική του απόκλιση δείχνει κάποιο συσχετισμό. Σημειώστε ότι ένα αναλογικό φαινόμενο είναι χαρακτηριστικό των λογαριθμικών δεδομένων. Τις επιπλοκές αυτού του γεγονότος θα τις συζητήσουμε αργότερα.

Εάν παίρνουμε αποφάσεις για τη στασιμότητα – για παράδειγμα, διαχωρίζοντας (ή συνδυάζοντας) δυο γεωλογικές ζώνες για τους σκοπούς της βαριογραφίας – τότε είναι σημαντικό να κοιτάξουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά κάθε ζώνης. Επίσης, είναι σημαντικό να μην συμπεριλάβουμε μη-μεταλλοφόρα υλικά από τα όρια των ζωνών μας. Σημειώστε ότι οι πιο σύγχρονες βάσεις γεωτρητικών δεδομένων περιέχουν όλα τα δεδομένα (συμπεριλαμβανομένων διαστημάτων εκτός της περιοχής άμεσου ενδιαφέροντος) και έτσι το παραπάνω αποτελεί σημαντικό σημείο.

Περιληπτικά:

1. Θέλουμε να βρούμε τα ‘δραστικά σφάλματα’. Αυτά είναι σφάλματα με ουσιαστικό αντίκτυπο στις εκτιμήσεις.
2. Δεν υπάρχει υποκατάστατο της εξέτασης εκτυπωμένων τομών.
3. Δεν υπάρχει δικαιολογία για την άγνοια της γεωλογίας! Όλα πρέπει να γίνονται σε σχέση με τη γεωλογία.
4. Το κόστος μερικών ημερών ελέγχου των δεδομένων είναι ελάχιστο σε σχέση με αυτό της επανάληψης της εκτίμησης, για να μην μιλήσουμε για την πιθανότητα ενός οικονομικά καταστροφικού σφάλματος!

Πως Υπολογίζεται ένα Βαριόγραμμα

Θα εξετάσουμε εδώ την πρακτική υπολογισμού του πειραματικού βαριογράμματος:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \left[\left\{ Z(x_i + h) - Z(x_i) \right\}^2 \right]$$

που είναι μια εκτίμηση του γενικού βαριογράμματος, όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\left[\left\{ Z(x + h) - Z(x) \right\}^2 \right]$$

Εφόσον το βαριόγραμμα μπορεί να οριστεί για $\Re = 1{,}2$ ή 3 διαστάσεις, το πειραματικό βαριόγραμμα μπορεί να υπολογιστεί σε 1, 2 ή 3 διαστάσεις. Πρώτα, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα βαριογράμματα θα πρέπει, αυστηρά, να υπολογίζονται μόνο με δείγματα ίσης στήριξης. Αυτό συνήθως θα σημαίνει ότι πρέπει να γίνει σύνθεση δεδομένων σε ίσα μήκη. Σημειώστε ότι, ως κανόνας, το μήκος της σύνθεσης δεν θα πρέπει να είναι ποτέ μικρότερος από το μέσο μήκος δείγματος, και στις περισσότερες περιπτώσεις υπαίθριων ορυχείων, θα πρέπει γενικά να είναι το μήκος που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη επιλεκτικότητα.

Εάν έχουμε δυο διαφορετικά προγράμματα γεωτρήσεων, θα πρέπει να καθορίσουμε κατά πόσο μπορούν νόμιμα να θεωρηθούν ισοδύναμα ή – κάτι που θα συμβαίνει στις περισσότερες περιπτώσεις – να διαχωρίζουμε τα δεδομένα από τα δυο προγράμματα. Παρόμοιοι προβληματισμοί ισχύουν και στα φύλλα των αναλύσεων.

1Δ: Κατά Μήκος μιας Γραμμής

Μερικές φορές θέλουμε να υπολογίσουμε ένα βαριόγραμμα κατά μήκος μιας γραμμής, για παράδειγμα, ο υπολογισμός του πειραματικού βαριογράμματος δειγμάτων κατά μήκος μιας γεώτρησης μπορεί να θεωρηθεί ως μονοδιάστατος. Άλλα παραδείγματα είναι το βαριόγραμμα σεισμικών χρόνων σε ένα προφίλ, δείγματα ψηγμάτων κατά μήκος ενός μετώπου εξόρυξης ή το βαριόγραμμα κατά μήκος δειγμάτων ελέγχου περιεκτικότητας τύπου Ditch Witch.

Για τους υπολογισμούς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα δείγματα βρίσκονται στο κέντρο κάθε διαστήματος. Εάν τα σημεία είναι σε κανονικές αποστάσεις κατά μήκος της γραμμής, το βαριόγραμμα μπορεί να υπολογιστεί από κάθε διάστημα *h* χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left\{Z(x_i + h) - Z(x_i)\right\}^2\right]$$

όπου:

- $Z(x_i)$ είναι τα δεδομένα.
- x_i είναι οι θέσεις στις οποίες υπάρχουν δεδομένα και για x_i και για (x_i+h).
- $N(h)$ είναι το πλήθος των x_i δηλαδή το πλήθος των ζευγών σημείων που λαμβάνονται στο άθροισμα όταν υπολογίζεται το $\gamma(h)$. Εάν λείπουν δεδομένα, το ζεύγος απλά αγνοείται.

Εάν είναι διαθέσιμες διάφορες γραμμές δειγμάτων, για παράδειγμα πολλαπλά προφίλ στη δειγματοληψία εδάφους, παράλληλες γραμμές Ditch Witch, διάφορες γεωτρήσεις, κλπ, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο βαριόγραμμα για μια ομάδα παράλληλων γραμμών. Εάν το διάστημα κατά μήκος μιας γραμμής δεν είναι σταθερό μπορούμε να κάνουμε τα εξής:

- Να κανονικοποιήσουμε τα δεδομένα με σύνθεση σε σταθερό διάστημα: αυτή είναι η συνήθης προσέγγιση όταν υπολογίζεται ένα 1Δ βαριόγραμμα στη μεταλλευτική.
- Να ομαδοποιήσουμε τα δείγματα σε κλάσεις αποστάσεως, δηλαδή να εφαρμοστεί μια ανοχή απόστασης.

2Δ: Στο Επίπεδο

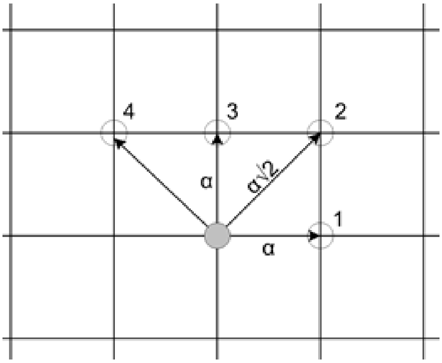
Ο υπολογισμός των πειραματικών βαριογραμμάτων σε δύο διαστάσεις απαιτείται σε πολλές μεταλλευτικές εφαρμογές:

- Στο επίπεδο μιας βαθμίδας ορυχείου, για παράδειγμα στον έλεγχο περιεκτικότητας.
- Για ένα στρώμα ή άλλο στρωματογραφικό χαρακτηριστικό, για παράδειγμα το πάχος στρώματος στην εξόρυξη άνθρακα.
- Στο επίπεδο μιας φλέβας.
- Για τη μοντελοποίηση τοπογραφικών δεδομένων ή γεωλογικών επιφανειών.
- Όταν εξετάζονται δεδομένα που έχουν συλλεχθεί σε σημεία μιας επιφάνειας, για παράδειγμα, εξερευνητική γεωχημεία εδάφους.

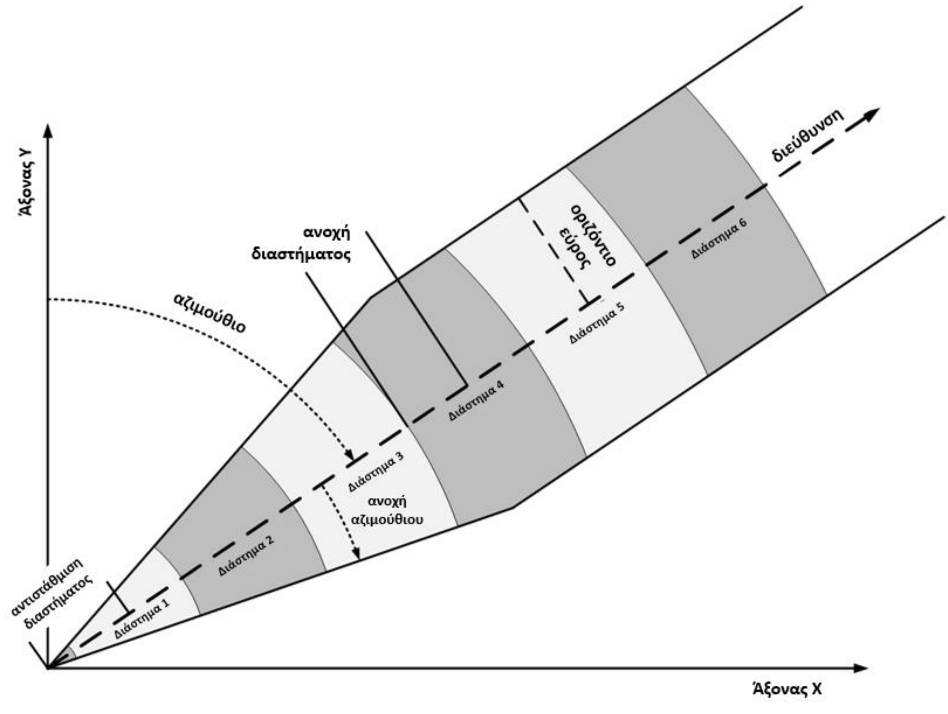
Όταν υπολογίζεται το βαριόγραμμα στο επίπεδο, θα πρέπει να χρησιμοποιούνται τουλάχιστον τέσσερις διευθύνσεις για τον έλεγχο της ανισοτροπίας.

Στην περίπτωση μιας κανονικής καννάβου, ο υπολογισμός του πειραματικού βαριογράμματος είναι ουσιαστικά όμοιος με αυτόν των παράλληλων προφίλ που εξετάστηκε παραπάνω. Το βαριόγραμμα θα πρέπει να υπολογιστεί σε τέσσερις κύριες διευθύνσεις. Σημειώστε ότι τα διαστήματα είναι διαφορετικά κατά μήκος των διαγωνίων της καννάβου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.

Εάν τα δεδομένα δεν είναι σε κανονικά διαστήματα, τότε υπολογίζουμε το βαριόγραμμα για διάφορες γωνιακές κλάσεις και επίσης καθορίζουμε μια ανοχή απόστασης (ή διαστήματος) – δείτε το Σχήμα 4.2. Ανιχνεύουμε το τμήμα ενός κύκλου μεταξύ δύο τόξων. Αργότερα θα κάνουμε κάποια σχόλια για τις ανοχές διαστήματος και γωνίας.



Σχήμα 4.1: Τα διαστήματα είναι διαφορετικά, ακόμα και για ένα ισοτροπικό πλέγμα.



Σχήμα 4.2: Γωνιακή ανοχή, διάστημα, και ανοχή διαστήματος.

3Δ: Στο Χώρο

Σε τρεις διαστάσεις, γενικεύουμε την προσέγγιση δυο διαστάσεων ώστε η ανίχνευση να γίνεται σε ένα κωνικό τμήμα μιας σφαίρας, αντί σε έναν τομέα ενός κύκλου. Κατά τα άλλα η ιδέα είναι η ίδια. Φυσικά, εκτός από το αζιμούθιο, τώρα θα πρέπει να ορίσουμε και την κλίση σε κάθε διεύθυνση. Στην πράξη, η τρίτη διάσταση συχνά παίζει έναν μοναδικό ρόλο. Συχνά υπάρχει πολύ μεγαλύτερη διακύμανση στην 3η διάσταση.

Έτσι, όταν κάνουμε βαριογραφία σε τρεις διαστάσεις, έχουμε συνήθως μια διεύθυνση με πιο πυκνή δειγματοληψία από τις άλλες, για παράδειγμα: 'κατά μήκος της φλέβας' μπορεί να είναι και 'κατά μήκος της γεώτρησης'. Στην περίπτωση αυτή, λογικά ορίζουμε αυτήν τη διεύθυνση για τον υπολογισμό βαριογραμμάτων, και το βαριόγραμμα κατά μήκος της γεώτρησης (1Δ) θα προσεγγίσει την 'κατά μήκος της φλέβας' διεύθυνση. Το ίδιο ισχύει σε κοιτάσματα με κατακόρυφες (ή μεγάλης κλίσης) γεωτρήσεις: το κατά μήκος της γεώτρησης βαριόγραμμα προσεγγίζει την κατακόρυφη διεύθυνση.

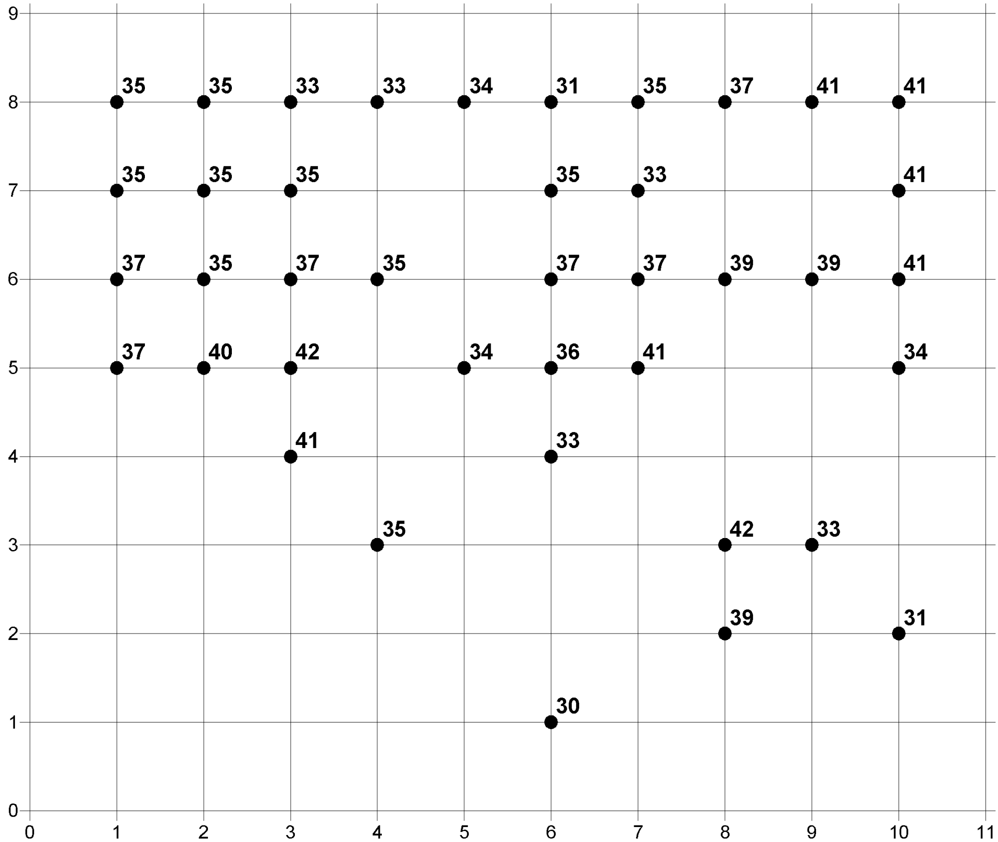
Άσκηση: Υπολογισμός Πειραματικού Βαριογράμματος

Τα δεδομένα του Σχήματος 4.3 είναι σε τετραγωνικό πλέγμα διαστήματος α. Το βαριόγραμμα θα πρέπει να υπολογισθεί στις τέσσερις κύριες διευθύνσεις α = 1,2,3,4 και για τιμές h = 1,2 και 3.

Σημείωση! Στις διευθύνσεις 3 και 4 το διάστημα δεν είναι ίσο με α μονάδες, αλλά ίσο με $a\sqrt{2} = 1.4a$. Υπολογίζουμε το βαριόγραμμα σε κάθε διεύθυνση χρησιμοποιώντας την εξίσωση που δόθηκε νωρίτερα:

$$\hat{\gamma}_a(h) = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left\{Z(x_i + h) - Z(x_i)\right\}^2\right]$$

Σημειώστε ότι τα ζεύγη των κόμβων με μόνο μία (ή καθόλου) τιμές θεωρούνται άγνωστα και δεν εισάγονται στον υπολογισμό.



Σχήμα 4.3: Δεδομένα παραδείγματος.

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα για τις διευθύνσεις 1,2,3 και 4:

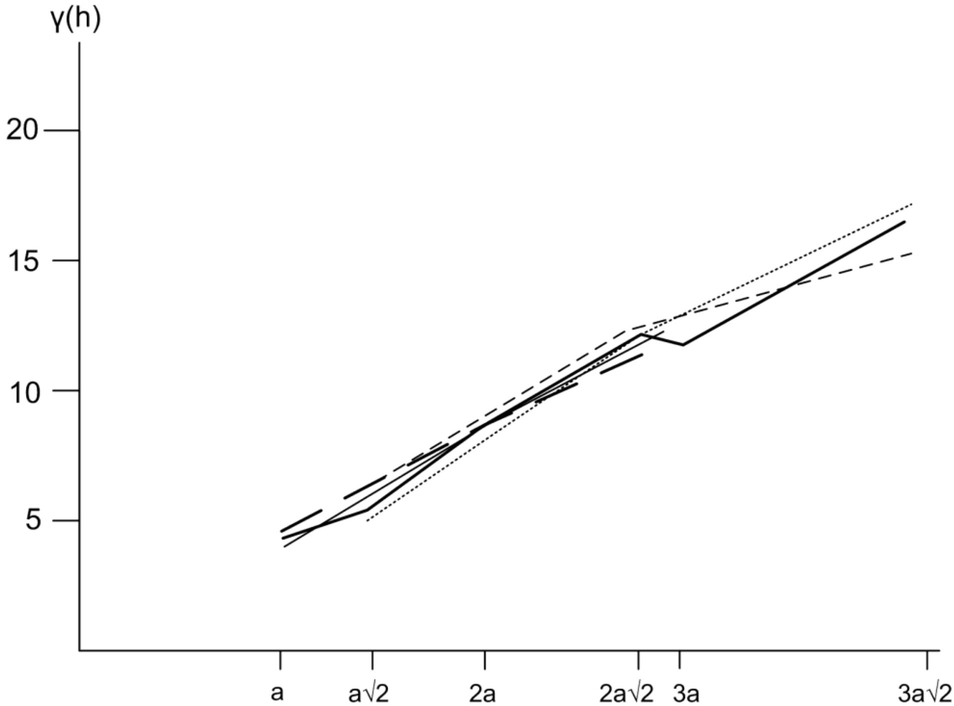
Διεύθυνση	h = 1 διάστημα		h = 2 διαστήματα		h = 3 διαστήματα	
	N(1)	*γ(1)*	N(2)	*γ(2)*	N(3)	*γ(3)*
1	24	4.10				
2						
3						
4						

Σχεδιάζοντας το υπολογισμένο πειραματικό βαριόγραμμα (Σχήμα 4.4), μπορούμε να δούμε ότι το βαριόγραμμα αυτό είναι ισοτροπικό. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να προσαρμόσουμε ένα μοντέλο στο *μέσο* βαριόγραμμα (το οποίο βρίσκουμε από τη μέση τιμή των βαριογραμμάτων για κάθε διάστημα) για τα διαστήματα:

$$a, a\sqrt{2}, 2a, 2a\sqrt{2}, 3a \text{ και } 3a\sqrt{2}\ .$$

Ένα γραμμικό μοντέλο χωρίς φαινόμενο ψήγματος μπορεί να προσαρμοστεί καλά. Ένα γραμμικό μοντέλο (όπως θα δούμε) ορίζεται απλά από την κλίση του: στην προκειμένη περίπτωση 4.1*α*.

Τα δεδομένα αυτά προέρχονται από μια προσομοίωση στον υπολογιστή της εφαρμογής ενός γραμμικού βαριογράμματος $\gamma(h) = \overline{\omega}|h|$. Με άλλα λόγια, τα νούμερα δημιουργήθηκαν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εγγυώνται ένα καλό γραμμικό βαριόγραμμα για την άσκηση μας. Συνεπώς, το παράδειγμα αποδίδει μια πολύ ιδανική κατάσταση: σε μια πραγματική περίπτωση τέτοιος μικρός αριθμός δεδομένων θα ήταν μάλλον απίθανο να παράγει ένα πειραματικό βαριόγραμμα που να μπορούμε να ερμηνεύσουμε. Στην πραγματικότητα, με τόσα λίγα δεδομένα τα πειραματικά βαριογράμματα είναι γενικά πολύ ακανόνιστα.



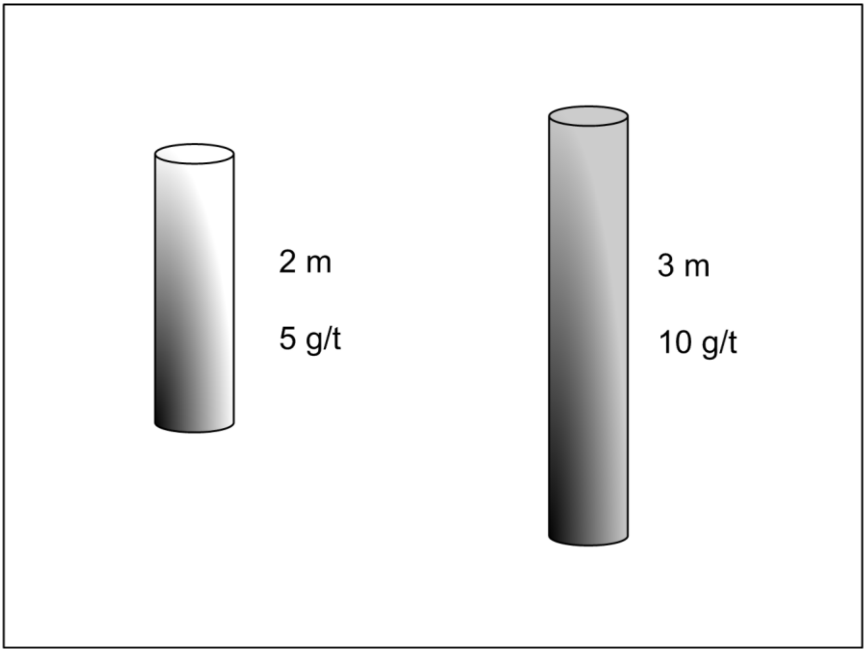
Σχήμα 4.4: Παράδειγμα πειραματικού βαριογράμματος: ισοτροπική συμπεριφορά.

Αθροιστικότητα

Σχεδόν σε όλες τις εφαρμογές της γεωστατιστικής, οι μεταβλητές που μελετάμε πρέπει να είναι αθροιστικές. Οι μεταβλητές είναι αθροιστικές όταν ο μέσος όρος σε μια ορισμένη ζώνη είναι ο αριθμητικός μέσος όρος των τιμών. Αυτό δεν συμβαίνει πάντα, γι’ αυτό ας δούμε ένα παράδειγμα.

Ένα Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το μέσο πάχος μιας φλέβας και τη μέση περιεκτικότητα του χρυσού στην απλή περίπτωση του Σχήματος 4.5. Υπάρχουν δύο τμήματα πυρήνα: ένα με περιεκτικότητα 5 g/t και πάχος 2m, και το άλλο με περιεκτικότητα 10 g/t και πάχος 3m.



Σχήμα 4.5: Τμήματα πυρήνα διαφορετικού μήκους και περιεκτικότητας.

Προφανώς, το μέσο πάχος είναι απλά ο αριθμητικός μέσος, δηλαδή 2.5m. Όμως, ο απλός υπολογισμός του αριθμητικού μέσου των δυο περιεκτικοτήτων θα μας έδινε λάθος αποτέλεσμα:

$$\text{μέση περιεκτικότητα χρυσού} = \frac{5+10}{2} = 7.5 \text{ g/t Au}$$

Χρησιμοποιώντας έναν απλό αριθμητικό μέσο των περιεκτικοτήτων δίνεται μια εσφαλμένη εκτίμηση της μέσης περιεκτικότητας της περιοχής που αντιπροσωπεύουν τα δύο δείγματα. Η μέση περιεκτικότητα σε χρυσό *δεν* είναι προφανώς ο μέσος όρος τους, αλλά ο ζυγισμένος μέσος, με βάση τα πάχη των διαστημάτων:

$$\text{μέση περιεκτικότητα χρυσού} = \frac{2\times 5+3\times 10}{2+3} = 8.0 \text{ g/t Au}$$

Το γινόμενο περιεκτικότητας και πάχους είναι μια μεταβλητή που συχνά αποκαλείται *συγκέντρωση*. Σε μια εκτίμηση που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε συγκεντρώσεις (και αυτή είναι η παραδοσιακή προσέγγιση στη μεταλλευτική γεωλογία) εκτελούμε ολόκληρη τη γεωστατιστική μελέτη σε δυο μεταβλητές: τη συγκέντρωση και το πάχος. Στο τέλος της μελέτης, διαιρούμε τις συγκεντρώσεις του kriging με τα πάχη του kriging για να λάβουμε την εκτίμηση της περιεκτικότητας.

Η συγκέντρωση είναι ανάλογη στο περιεχόμενο σε μέταλλο *εάν* το ειδικό βάρος είναι σταθερό. Σημειώστε ότι, εάν έχουμε ένα μεταβλητό ειδικό βάρος και μπορούμε να δώσουμε διαφορετικό ειδικό βάρος σε κάθε διάστημα, τότε είναι πιο σωστό να χρησιμοποιήσουμε την *τριπλή συγκέντρωση*, δηλαδή την περιεκτικότητα πολλαπλασιασμένη επί το πάχος και επί το ειδικό βάρος.

Οι συγκεντρώσεις (ή τριπλές συγκεντρώσεις) είναι αθροιστικές, και έτσι μπορούμε βάσιμα να τις χρησιμοποιήσουμε στη γεωστατιστική. Η άλλη προσέγγιση θα ήταν να μοντελοποιήσουμε τη φλέβα σε τρεις διαστάσεις χρησιμοποιώντας δείγματα ίσου μήκους, που σε πολλές γεωλογικά απλές περιπτώσεις είναι πιο πολύπλοκο και πιο ευάλωτο σε σφάλματα. Ένα άλλο παράδειγμα μη-αθροιστικών μεταβλητών είναι η διαπερατότητα. Παρόλο που μπορούμε να χειριστούμε το πορώδες ως αθροιστική μεταβλητή, η διαπερατότητα εξαρτάται από την κλίμακα και δεν μπορεί γενικά να αντιμετωπισθεί ως αθροιστική.

Μοντέλα Βαριογραμμάτων

Όταν υπολογίζουμε το πειραματικό βαριόγραμμα, παίρνουμε μια ασυνεχή συνάρτηση: για κάθε ορισμένο σετ διαστημάτων *h* έχουμε μια πειραματική τιμή του $\hat{\gamma}(h)$. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ασυνεχές πειραματικό βαριόγραμμα ως συνάρτηση βάρους για την εκτίμηση, χρειαζόμαστε μια συνεχή συνάρτηση. Για να χρησιμοποιήσουμε το βαριόγραμμα στην εκτίμηση (kriging), ή οποιοδήποτε άλλο σκοπό, χρειάζεται να προσαρμόσουμε μια μαθηματική συνάρτηση – ένα μοντέλο βαριογράμματος – στο πειραματικό μας βαριόγραμμα.

Τα περισσότερα βαριογράμματα έχουν αρκετά απλές μορφές, με την περισσότερη διακύμανση στη μορφή τους να οφείλεται στη δειγματοληψία ή σε στατιστικά φαινόμενα. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή μοντέλων είναι λοιπόν αρκετά απλές. Όμως, δεν είναι όλες οι συναρτήσεις κατάλληλες ως μοντέλο βαριογράμματος.

Καταλληλότητα των Μοντέλων

Το μοντέλο βαριογράμματος είναι ένα μαθηματικό μοντέλο για τη χωρική μεταβλητότητα: δεν ταιριάζουν όλα τα μοντέλα σε αυτήν. Ο λόγος είναι απλός: όταν η διακύμανση διασποράς ή η διακύμανση εκτίμησης υπολογίζονται από το μοντέλο βαριογράμματος θα πρέπει να προκύψει *μια θετική διακύμανση*. Αυτό δεν είναι προαιρετικό! Σε μια μαθηματική και λογική έννοια, μια αρνητική διακύμανση είναι απαράδεκτη και άνευ νοήματος.

Αποδεκτοί Γραμμικοί Συνδυασμοί

Όπως συζητήσαμε στο πρώτο μέρος αυτών των σημειώσεων, οι πιο πολλοί εκτιμητές που χρησιμοποιούνται για εφαρμογές εκτίμησης αποθεμάτων είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διαθέσιμων δεδομένων. Στο Κεφάλαιο 7 θα αναπτύξουμε έναν 'βέλτιστο' εκτιμητή που θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός (το kriging). Θα χρειαστεί να μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση των γραμμικών συνδυασμών, για παράδειγμα:

$$Z^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i) \qquad \textbf{Εξίσωση 4-1}$$

Στην περίπτωση μιας στάσιμης μεταβλητής *Z(x)* με συνάρτηση συνδιακύμανσης *C(h)* η διακύμανση του γραμμικού συνδυασμού μπορεί να δειχθεί ότι είναι:

$$\begin{aligned} VarZ^* &= Var\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i) \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j) \end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 4-2}$$

Όπου $C(x_i - x_j)$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ των δυο θέσεων x_i και x_j. Η διακύμανση της ποσότητας Z^* (δηλαδή του γραμμικού συνδυασμού) *πρέπει* να είναι μη-αρνητική για *οποιαδήποτε* σημεία x_i και x_j που εξετάζουμε, και μη αρνητική ανεξάρτητα από τα βάρη λ_i που επιλέγουμε. Μια συνάρτηση που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη λέγεται ότι είναι *θετικά ορισμένη* ή, πιο αυστηρά 'υπό όρους θετικά ορισμένη'.

Δεν θα προχωρήσουμε στο γιατί πρέπει να επιλέξουμε μια συνάρτηση που να ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή (εάν ενδιαφέρεστε ανατρέξτε στους Armstrong και Jabin, 1981, για ένα καλό παράδειγμα). Αλλά θα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι τα μοντέλα βαριογραμμάτων πρέπει να είναι θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Θα πρέπει να προσέξετε επίσης ότι κάποια μοντέλα μπορεί να είναι αποδεκτά σε μια ή δυο διαστάσεις αλλά απαράδεκτα για μοντελοποίηση ενός τρισδιάστατου βαριογράμματος!

Από Πρακτική Άποψη

Από πρακτική άποψη αυτό έχει πολύ άμεσες επιπλοκές:

- **Υπάρχει μια ομάδα από αποδεκτά μοντέλα για βαριογράμματα. Αυτά τα μοντέλα είναι υπό όρους θετικά ορισμένα.**
- **Η χρήση μη-αποδεκτών μοντέλων μπορεί να οδηγήσει σε αρνητικές διακυμάνσεις, και αυτό είναι φανερά απαράδεκτο.**
- **Ο χρήστης της γεωστατιστικής θα πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιεί *μόνο* γνωστά, επικυρωμένα μοντέλα βαριογραμμάτων.**

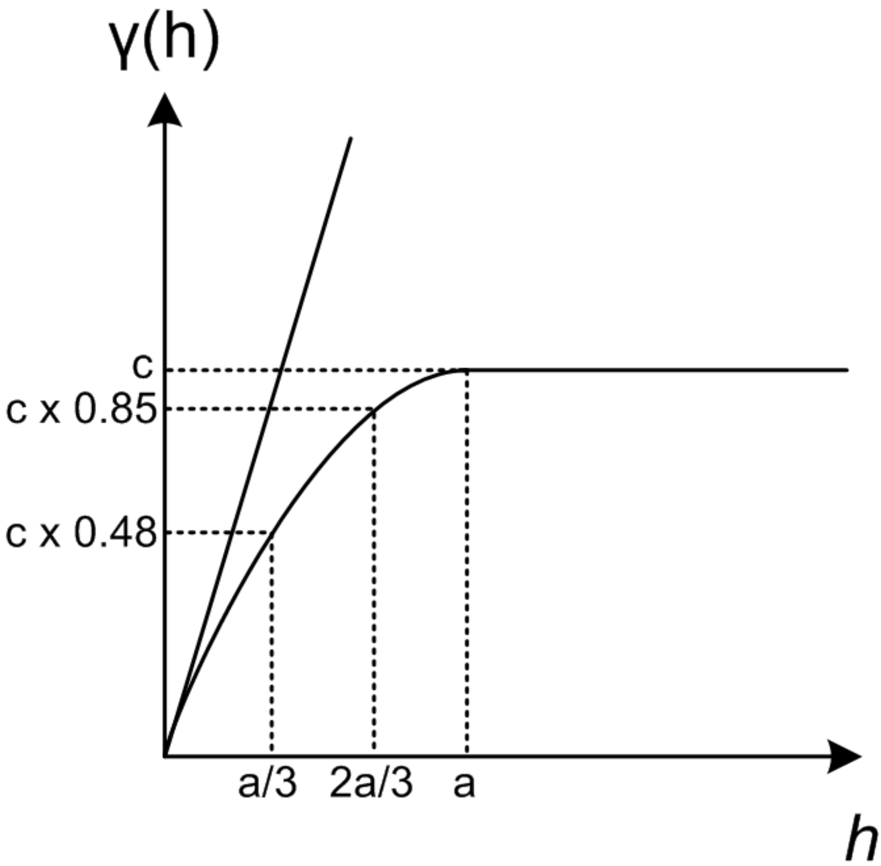
Αυτά μπορεί να ακούγονται περιοριστικά, αλλά στην πράξη δεν είναι, γιατί αρκούν μόνο μερικά από τα διαθέσιμα αποδεκτά μοντέλα (ή συνδυασμοί τους) για τη μοντελοποίηση οποιουδήποτε πειραματικού βαριογράμματος που είναι πιθανό να βρείτε ποτέ μπροστά σας!

Μερικά Κοινά Μοντέλα

Εδώ θα δώσουμε το περίγραμμα των πιο κοινών μοντέλων που διατίθενται στο γεωστατιστικό λογισμικό. Όλα αυτά τα μοντέλα είναι αποδεκτά.

Σφαιρικό

Το Σχήμα 4.6 δείχνει το σφαιρικό μοντέλο. Είναι το πιο κοινά χρησιμοποιούμενο μοντέλο βαριογράμματος, και συχνά προσαρμόζεται μαζί με ένα μοντέλο φαινόμενου ψήγματος (δείτε την επόμενη ενότητα). Το σφαιρικό μοντέλο διατίθεται σε οποιοδήποτε γεωστατιστικό λογισμικό. Τα πιο γενικά πακέτα μοντελοποίησης ορυχείων που περιλαμβάνουν ένα τμήμα kriging περιλαμβάνουν επίσης το σφαιρικό μοντέλο.



Σχήμα 4.6: Το σφαιρικό μοντέλο.

Το σφαιρικό μοντέλο έχει μια απλή πολυωνυμική έκφραση και ορίζεται ως εξής:

$$\gamma(h)=C\left[\frac{3}{2}\frac{|h|}{a}-\frac{1}{2}\frac{|h|^3}{a^3}\right]$$ για $|h| \le \alpha$ **Εξίσωση 4-3**

$$\gamma(h)=C$$ για $|h| > \alpha$ **Εξίσωση 4-4**

όπου *α* είναι το εύρος του βαριογράμματος και *C* είναι η οριακή τιμή (όπως ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο). Το σφαιρικό μοντέλο ταιριάζει καλά σε ότι βλέπουμε συνήθως στις μεταλλευτικές μεταβλητές: μια ημι-γραμμική συμπεριφορά κοντά στην αρχή ακολουθούμενη από σταθεροποίηση στην οριακή τιμή. Το σφαιρικό μοντέλο, έχοντας οριακή τιμή, είναι ένα μεταβατικό μοντέλο, δηλαδή μπορούμε να μοντελοποιήσουμε μια μεταβατική συμπεριφορά πηγαίνοντας από συσχετισμό, σε αποστάσεις μικρότερες ή ίσες στο εύρος *α*, και έλλειψη συσχετισμού, σε αποστάσεις πέρα από αυτό.

Σημειώστε ότι η εφαπτομένη στην αρχή τέμνει την οριακή τιμή στα 2/3 του εύρους. Παρόλο που αρχικά χρησιμοποιήθηκε σε 3Δ, το μοντέλο αυτό είναι αποδεκτό σε 2Δ και 1Δ.

Μοντέλο Δύναμης

Τα μοντέλα συνάρτησης δύναμης (Σχήμα 4.7) χρησιμοποιούνται συχνά στο γεωστατιστικό λογισμικό. Αυτά τα μοντέλα δεν έχουν οριακή τιμή, δηλαδή δεν είναι μεταβατικά, και έχουν τη μορφή:

$$\gamma(h)=\overline{\omega}|h|^{\lambda}$$ **Εξίσωση 4-5**

όπου *λ* είναι μια δύναμη μεταξύ του 1 και 2. Μια συγκεκριμένη περίπτωση είναι το γραμμικό μοντέλο, όπου το *λ* ισούται με 1.0 (αυτό το μοντέλο είναι μερικές φορές χρήσιμο σε μεταλλευτικές εφαρμογές). Το γραμμικό μοντέλο είναι λοιπόν το παρακάτω:

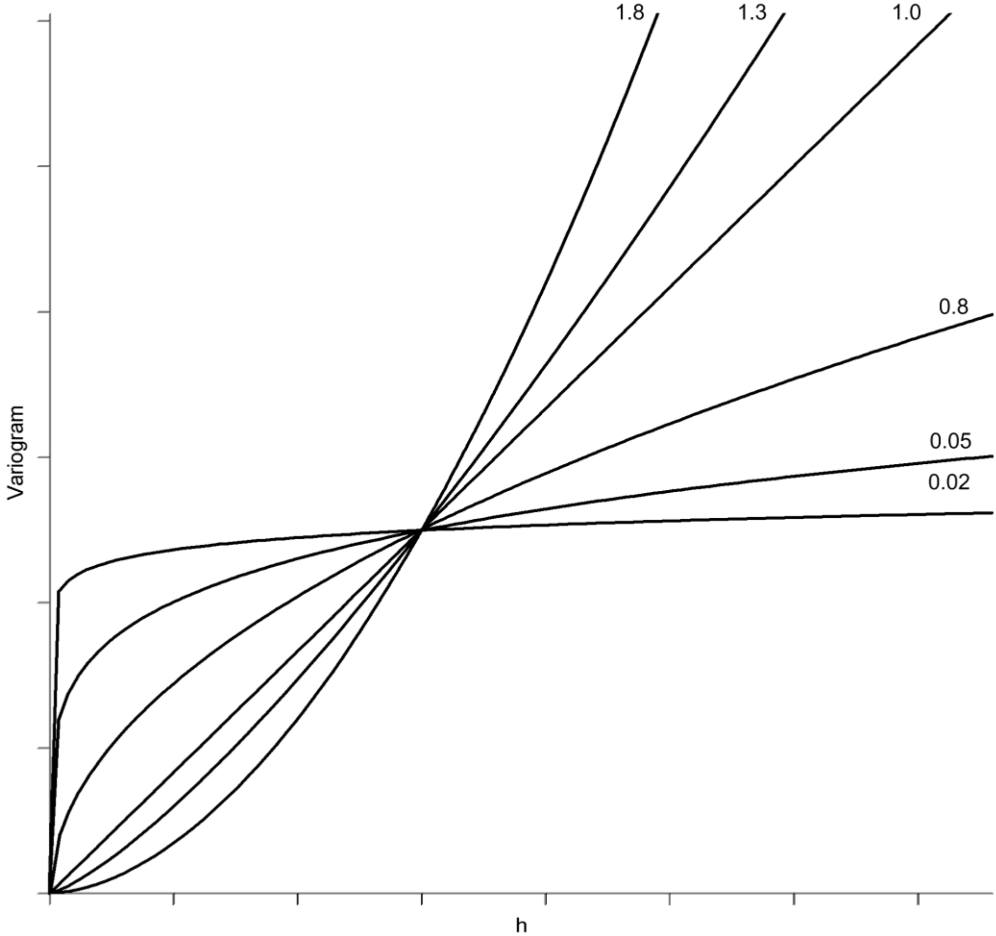
$$\gamma(h)=\overline{\omega}|h|$$ **Εξίσωση 4-6**

και *ω* είναι η κλίση του βαριογράμματος. Για το γραμμικό μοντέλο, η τιμή του βαριογράμματος είναι απλά ανάλογη του *h*. Πολλά βαριογράμματα περιεκτικότητας έχουν λίγο-πολύ γραμμική συμπεριφορά κοντά στην αρχή, για παράδειγμα τα σφαιρικά είδη βαριογραμμάτων. Όπως θα δούμε αργότερα, η συμπεριφορά του βαριογράμματος κοντά στο μηδέν είναι ο κύριος παράγοντας στο *kriging*. Συνεπώς, το γραμμικό μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί πολύ, εν μέρει λόγω της απλότητας του (ειδικά στις πρώτες 'χειρονακτικές' μέρες της γεωστατιστικής).

Για μοντέλα δύναμης με *λ* μικρότερο από 1.0, το σχήμα τους είναι κοίλο, όχι πολύ διαφορετικό από αυτό του σφαιρικού μοντέλου, μόνο πιο απότομο (δείχνοντας λιγότερο συνεχή συμπεριφορά από το σφαιρικό μοντέλο).

Για *λ* μεγαλύτερο από 1.0 τα μοντέλα δύναμης έχουν καμπύλο σχήμα στην αρχή, δείχνοντας πολύ συνεχή συμπεριφορά σε μικρές αποστάσεις. Αυτού του είδους η συμπεριφορά δεν βρίσκεται συχνά σε μεταλλευτικές εφαρμογές. Μάλιστα, για *λ* = 2.0

έχουμε μια παραβολή, και ομαλά διαφοροποιήσιμη συμπεριφορά (ανήκουστη στις μεταλλευτικές εφαρμογές). Συνεπώς, θα πρέπει να δοθεί προσοχή στη ρύθμιση της τιμής του λ εάν αποφασίσει κανείς να χρησιμοποιήσει το μοντέλο αυτό.



Σχήμα 4.7: Μοντέλα δύναμης.

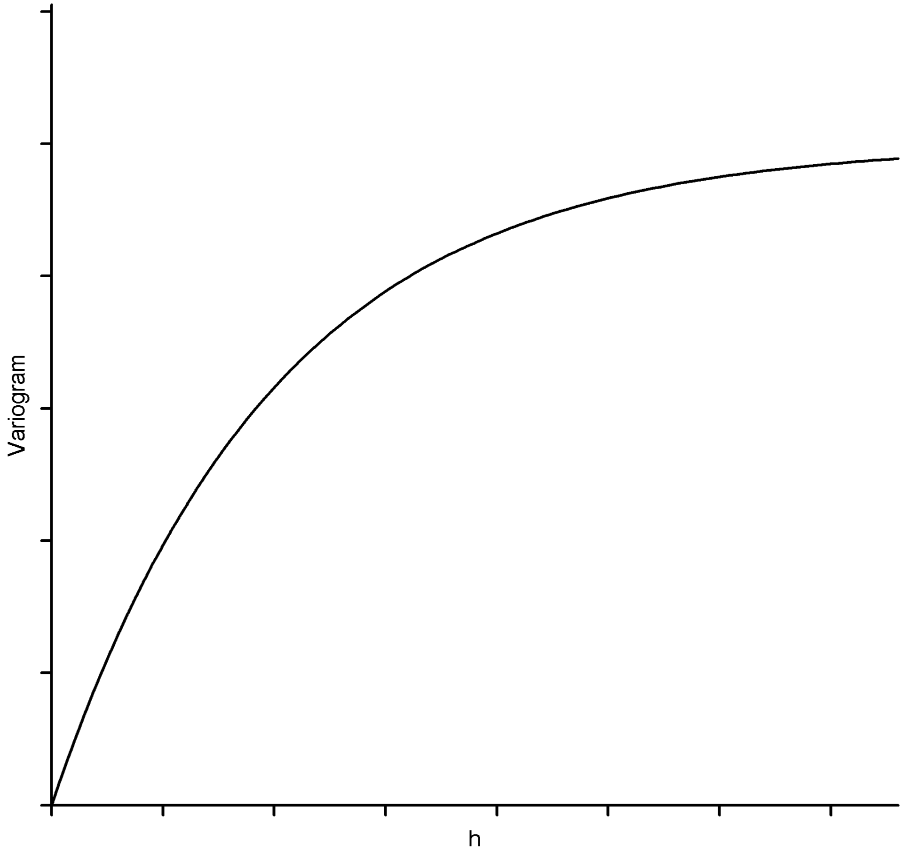
Εκθετικό

Το εκθετικό μοντέλο (δείτε το Σχήμα 4.8) έχει την εξής μορφή:

$$\gamma(h) = C\left[1 - e^{-\frac{h}{a}}\right] \qquad \textbf{Εξίσωση 4-7}$$

Όπου *C* είναι η ασύμπτωτη της καμπύλης του μοντέλου. Σημειώστε ότι το *α* εδώ δεν είναι το εύρος (όπως ορίζεται στο σφαιρικό μοντέλο, για παράδειγμα) αλλά είναι μια παράμετρος απόστασης που ελέγχει τη χωρική έκταση της συνάρτησης. Το εκθετικό μοντέλο δείχνει παρόμοιο σε πρώτη ματιά με το σφαιρικό μοντέλο και χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει μεταβατικά φαινόμενα. Εφόσον το εκθετικό βαριόγραμμα πλησιάζει ασυμπτωτικά την οριακή τιμή, το 'πρακτικό' ή 'δραστικό' εύρος ορίζεται συμβατικά να είναι 3*α* (το βαριόγραμμα είναι στο 95% της οριακής τιμής σε αυτήν την απόσταση).

Παρόλο που μερικές φορές εφαρμόζεται σε μεταλλευτικά δεδομένα, το μοντέλο αυτό βρίσκει περισσότερη εφαρμογή σε μη-μεταλλευτικές εφαρμογές, για παράδειγμα στη χημεία εδάφους (Webster και Oliver, 1990).



Σχήμα 4.8: Εκθετικό μοντέλο.

Gaussian

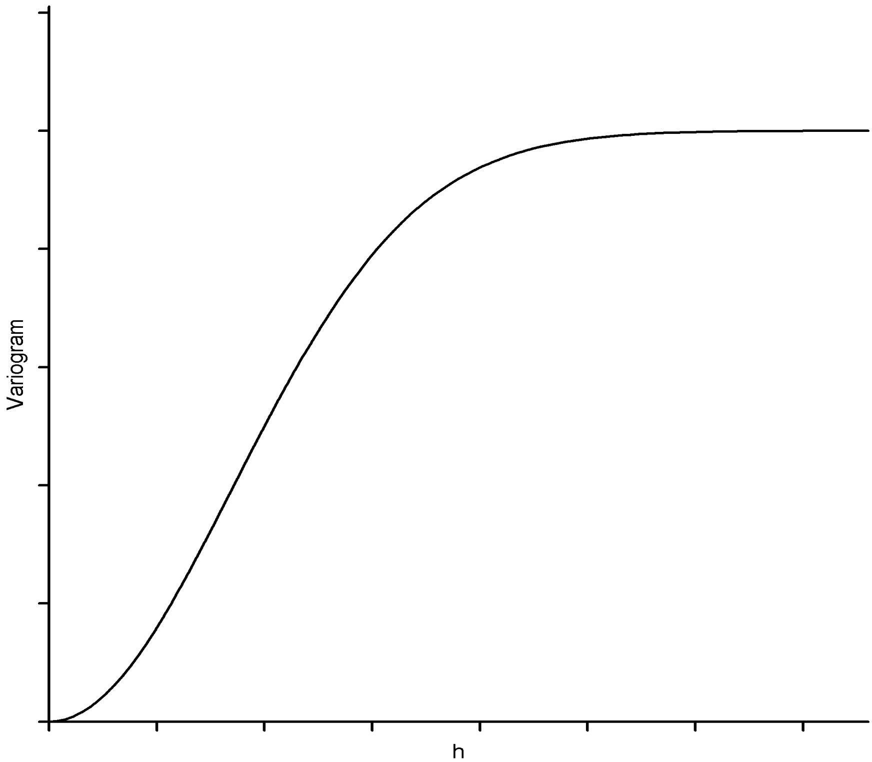
Το μοντέλο του Gauss (Σχήμα 4.9) εφαρμόζεται μερικές φορές στο γεωστατιστικό λογισμικό. Η μορφή του είναι η εξής:

$$\gamma(h) = C\left[1 - e^{\frac{-|h|^2}{a^2}}\right]$$ **Εξίσωση 4-8**

Όπου, όπως και με το εκθετικό μοντέλο, το *C* είναι η ασύμπτωτη της καμπύλης του μοντέλου. Σημειώστε ότι, και πάλι, το *α* δεν είναι το εύρος αλλά μια παράμετρος της απόστασης που ελέγχει τη χωρική έκταση της συνάρτησης. Το πρακτικό εύρος για το μοντέλο του Gauss είναι 1.73*α* (και πάλι, αυτή είναι η απόσταση στην οποία το μοντέλο φτάνει το 95% της οριακής τιμής.

Το Gaussian αντιπροσωπεύει υπερβολικά συνεχή συμπεριφορά στην αρχή. Στην πράξη, ένα τέτοιο βαριόγραμμα είναι ακατάλληλο για μια μεταβλητή περιεκτικότητας. Η μόνη του εφαρμογή είναι για πολύ ομαλές, συνεχείς μεταβλητές όπως η τοπογραφία. Μερικές γεωλογικές επιφάνειες επίσης μπορεί να μοντελοποιηθούν επαρκώς από ένα Gaussian βαριόγραμμα. Γενικά, και εφόσον είναι διαθέσιμο το κυβικό μοντέλο μπορεί να είναι πιο κατάλληλο.

Όμως, είναι σημαντικό να γνωρίζετε ότι το μοντέλο αυτό, εάν χρησιμοποιηθεί για kriging, θα πρέπει *πάντα* να συνδυάζεται με ένα μικρό φαινόμενο ψήγματος (ας πούμε ένα μικρό ποσοστό της οριακής τιμής) για να αποφεύγονται αριθμητικές αστάθειες στο kriging.



Σχήμα 4.9: Μοντέλο του Gauss.

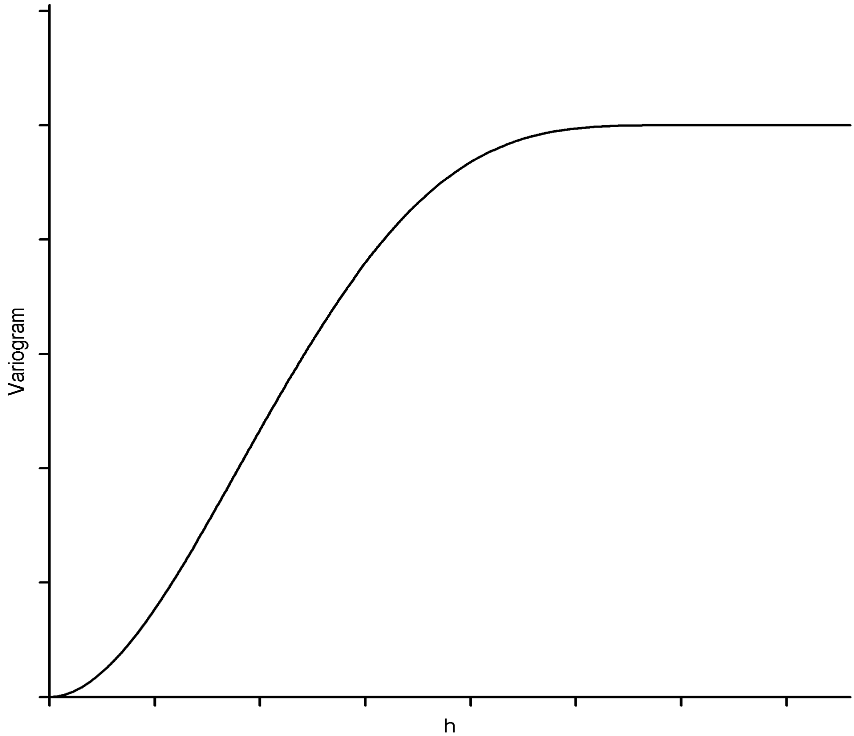
Κυβικό

Το κυβικό μοντέλο (Σχήμα 4.10) ορίζεται ως εξής:

$$\gamma(h) = C\left[7\frac{h^2}{a^2} - \frac{35}{4}\frac{h^3}{a^3} + \frac{7}{2}\frac{h^5}{a^5} - \frac{3}{4}\frac{h^7}{a^7}\right], |h| \leq a$$
$$\gamma(h) = C, |h| > a$$

Εξίσωση 4-9

Το κυβικό μοντέλο είναι ομαλό στην αρχή, όπως το Gaussian, αλλά όχι *τόσο* ομαλό. Το συνολικό του σχήμα θυμίζει το σφαιρικό μοντέλο, και εάν ένα πειραματικό μοντέλο εμφανίζει πολύ συνεχή συμπεριφορά, γενικά προτιμάται από το Gaussian.



Σχήμα 4.10: Κυβικό μοντέλο.

Μοντέλα για το Φαινόμενο Ψήγματος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε το φαινόμενο ψήγματος ως την ασυνέχεια του βαριογράμματος στην αρχή. Δώσαμε στο φαινόμενο ψήγματος μια απλή, φυσική ερμηνεία: εάν δυο μετρήσεις παίρνονται σε δύο πολύ κοντινά σημεία *x* και *x+h,* η διαφορά:

$$E\left[\{Z(x+h)-Z(x)\}^2\right]\rightarrow Co$$

όπου *Co* είναι μια τιμή μεγαλύτερη του μηδέν. Η τιμή αυτή είναι το φαινόμενο ψήγματος. Ενώ το βαριόγραμμα ορίζεται να είναι μηδέν σε μηδενικές αποστάσεις, στην πράξη παρατηρούνται ασυνέχειες στα μεταλλευτικά δεδομένα. Σημειώστε ότι το φαινόμενο ψήγματος υπονοεί ότι οι τιμές έχουν διακύμανση πολύ μικρής κλίμακας.

Για τη μοντελοποίηση του φαινόμενου ψήγματος χρειαζόμαστε μια συνάρτηση για το βαριόγραμμα που να υποθέτει την τιμή μηδέν στην αρχή και μια σταθερή τιμή για όλες τις τιμές μεγαλύτερες από αυτήν. Το αντίστοιχο μοντέλο για τη συνδιακύμανση έχει μια τιμή 1 στην αρχή και 0 οπουδήποτε αλλού. Για να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε μια μαθηματική συνάρτηση που έχει αυτές τις ιδιότητες, που ονομάζεται συνάρτηση *Dirac δ(h)*. Το μοντέλο που συνεπάγεται για το φαινόμενο ψήγματος είναι:

$$\gamma(h)=Co\{1-\delta(h)\} \quad \text{για } h \neq 0 \qquad \textbf{Εξίσωση 4-10}$$
$$\gamma(h) = 0 \quad \text{για } h = 0$$

Σημειώστε ότι, πιο αυστηρά ένα τέτοιο μοντέλο είναι δυνατό μόνο για μεταβλητές που έχουν διακριτές τιμές. Για μεταλλοφορία που εμφανίζεται σε ψήγματα ή κόκκους που είναι μικροί σε σύγκριση με τη στήριξη των δειγμάτων αυτό το μοντέλο δεν θα είναι προβληματικό. Όμως, μερικές γεωλογικές μεταβλητές (για παράδειγμα το βάθος έως κάποια γεωλογική επιφάνεια) είναι *ξεκάθαρα συνεχείς*. Ακόμα και με αυτές τις μεταβλητές, συνήθως χρειαζόμαστε την προσθήκη ενός μοντέλου φαινόμενου ψήγματος για να πάρουμε μια ικανοποιητική προσαρμογή το βαριογράμματος. Θα συζητήσουμε παρακάτω πολλούς λόγους για τους οποίους η προσθήκη αυτή είναι απαραίτητη για αυτές τις μεταβλητές (αραιά κατανεμημένα δεδομένα, σφάλματα δειγματοληψίας, σφάλματα θέσης).

Είναι προφανές ότι τα πράγματα είναι κάπως πολύπλοκα όταν φτάνουμε στη μοντελοποίηση του φαινόμενου ψήγματος, γι’ αυτό θα εξετάσουμε μερικά από τα θέματα που δημιουργούνται.

Φαινομενικό και Πραγματικό Φαινόμενο Ψήγματος

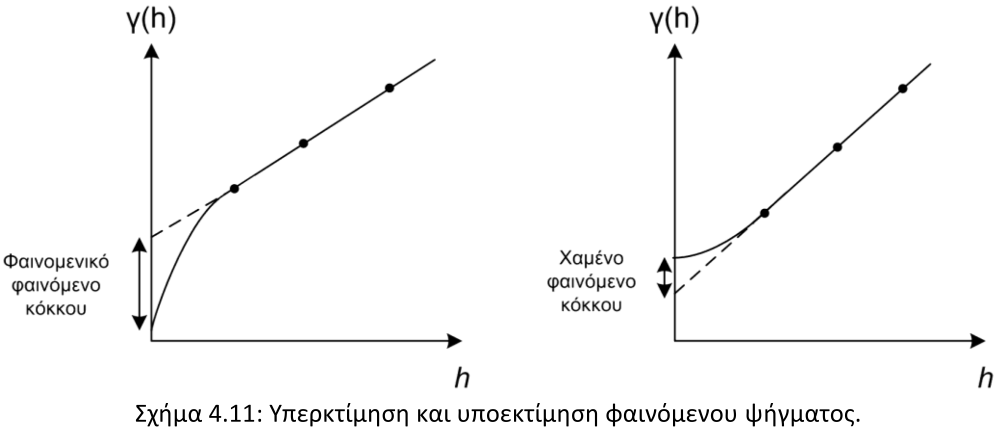
Το φαινόμενο ψήγματος έχει τις μονάδες της διακύμανσης, και μερικές φορές αποκαλείται *διακύμανση ψήγματος*. Το φαινόμενο ψήγματος είναι, μάλιστα, εκείνο το μέρος της διακύμανσης που δεν μπορεί να εξηγηθεί από τοπικό τμήμα της χωρομεταβλητής (δείτε το προηγούμενο κεφάλαιο). Σημειώστε ότι η περίπτωση πλήρους απουσίας χωρικού συσχετισμού αναφέρεται ως ένα *καθαρό φαινόμενο ψήγματος*. Στην πραγματικότητα, η μεταλλοφορία σπάνια παρουσιάζει αυτού του είδους τη συμπεριφορά, επειδή, παρόλο που οι μεταβλητές περιεκτικότητας – ειδικά για πολύτιμα μέταλλα – συνήθως αναμένονται να έχουν κάποια φυσική ‘χαοτική’ συμπεριφορά σε πολύ μικρές κλίμακες, υπάρχουν άλλοι λόγοι που συνεισφέρουν στο φαινόμενο ψήγματος.

Συνδυασμός 'Μικροδομών'

Μια από τις κύριες δυσκολίες εδώ είναι ότι υπάρχει μια ελάχιστη απόσταση κάτω από την οποία το βαριόγραμμα είναι άγνωστο, δηλαδή σε αποστάσεις μικρότερες από το πρώτο σημείο του βαριογράμματος (στο διάστημα '1'). Η συνήθης διαδικασία είναι να επεκτείνουμε από το πρώτο σημείο για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα (Y). Εάν η επέκταση οδηγεί σε μια θετική τομή με τον Y, αυτό λαμβάνεται ως ένδειξη της παρουσίας ενός φαινόμενου ψήγματος μεγέθους *Co*.

Από την άλλη πλευρά, εάν η καμπύλη περνά από την αρχή, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει φαινόμενο ψήγματος (ή είναι αμελητέο). Υπάρχει κίνδυνος λάθους και στις δυο περιπτώσεις (Σχήμα 4.11):

1. Μπορεί να πάρουμε πιο στενά διατεταγμένες πληροφορίες δειγματοληψίας που να δείχνουν ότι το βαριόγραμμα μας πράγματι τείνει στο μηδέν σε μικρά διαστήματα. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να υπάρχει μια 'ανύποπτη' δομή μικρού εύρους. Το φαινομενικό 'φαινόμενο ψήγματος' οφείλεται στο ότι τα δεδομένα μας είναι σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους.
2. Στην άλλη περίπτωση, τα παρατηρούμενα σημεία του βαριογράμματος μας οδηγούν στο να επεκτείνουμε το βαριόγραμμα στην αρχή όπου, πράγματι, το βαριόγραμμα 'οριζοντιώνεται' σε διαστήματα μικρότερα από τα διαθέσιμα δεδομένα. Αυτού του είδους η συμπεριφορά είναι τυπική της συνεισφοράς σφαλμάτων θέσης στο φαινόμενο ψήγματος.



Σχήμα 4.11: Υπερκτίμηση και υποεκτίμηση φαινόμενου ψήγματος.

Ενώ ο γεωστατιστικός μπορεί να είναι σε θέση να κάνει υποθέσεις για τη μικρής κλίμακας συμπεριφορά του βαριογράμματος χρησιμοποιώντας γνώση *a priori*, γενικά είναι καλύτερο να υπάρχουν διαθέσιμες πιο πυκνές πληροφορίες.

Το αποτέλεσμα μας περιορίζεται από τις κοντινότερες, ενδοδειγματικές αποστάσεις. Χωρίς τέτοιες πληροφορίες, οι δομές μικρής κλίμακας δεν μπορούν να αντιμετωπισθούν. Σε μια τέτοια περίπτωση, οποιεσδήποτε ένθετες δομές μικρού εύρους θα μείνουν άλυτες και θα εμφανίζονται ως φαινόμενο ψήγματος. Οι γεωστατιστικοί αναφέρονται στην ενσωμάτωση μικρών δομών στο φαινομενικό φαινόμενο ψήγματος ως 'ενσωμάτωση μικροδομών'. Κατά μια έννοια, αυτό είναι πάντα αναπόφευκτο, γιατί ακόμα και με εξαντλητική δειγματοληψία της μεταλλοφορίας, δεν μπορούμε να αντιμετωπίσουμε μια δομή μικρής κλίμακας όπως στην κλίμακα των δειγμάτων μας (ας πούμε των πυρήνων) ή σε μικρότερη κλίμακα. Γενικά, όταν μοντελοποιούμε το φαινόμενο ψήγματος θα πρέπει να έχουμε γνώση ότι η πιο πυκνή δειγματοληψία μπορεί συχνά να μειώσει το φαινόμενο ψήγματος.

Ισοτροπία και το Φαινόμενο Ψήγματος

Η πιο πυκνά δειγματοληπτούμενη διεύθυνση στις μεταλλευτικές καταστάσεις είναι συνήθως κατά μήκος της γεώτρησης. Εφόσον το φαινόμενο ψήγματος είναι αυστηρά ορισμένο για πολύ μικρές αποστάσεις $\delta(h) \to 0$, είναι *ανεξάρτητο* της διεύθυνσης. Αυτό έχει σημαντικές πρακτικές επιπλοκές:

1. Γενικά, η πιο πυκνά δειγματοληπτούμενη διεύθυνση θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί αξιόπιστα το φαινόμενο ψήγματος.
2. Είναι λάθος να μοντελοποιήσουμε το φαινόμενο ψήγματος με διαφορετικές τιμές σε διαφορετικές διευθύνσεις. Το φαινόμενο ψήγματος δεν επιτρέπεται να είναι ανισοτροπικό!

Σφάλμα Δειγματοληψίας και το Φαινόμενο Ψήγματος

Συχνά μπορεί να γνωρίζουμε τη διακύμανση των σφαλμάτων σχετικά με τη δειγματοληψία. Αυτό είναι από μόνο του ένα μεγάλο αντικείμενο, και μπορείτε να αναφερθείτε στην έξοχη εργασία του Pittard (1990α, 1990β) και, ιδιαίτερα – για μια συζήτηση της σχέσης μεταξύ της θεωρίας δειγματοληψίας του Gy και του φαινόμενου ψήγματος – στην εργασία του Ingamells (1981). Η σημασία της ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων δειγματοληψίας είναι αρκετά προφανής σε κάθε περίπτωση, αλλά είναι φανερό ότι η βαριογραφία μας θα επηρεαστεί από τη συνεισφορά των σφαλμάτων αυτών στο 'ανθρώπινο φαινόμενο ψήγματος'.

Σφάλμα Θέσης

Τα σφάλματα θέσης συμβαίνουν όταν ένα δείγμα που σχετίζεται στη βάση δεδομένων μας με το σημείο x (το οποίο σημείο μπορεί να είναι σε μια, δυο ή τρεις διαστάσεις) μετρήθηκε πραγματικά σε μια άλλη θέση $x+u$. Και πάλι, αυτή είναι μια συνεισφορά των μετρήσεων στη διακύμανση ψήγματος. Στην περίπτωση αυτή, αντί να μελετήσουμε μια μεταβλητή $Z(\chi)$, στην πραγματικότητα μελετούμε τη:

$$Z_1(x) = Z(x+u) \quad \textbf{Εξίσωση 4-11}$$

Εάν το σφάλμα μέτρησης είναι σταθερό, για παράδειγμα, η κάνναβος μας είναι λανθασμένα τοποθετημένη 10m ανατολικά, δεν υπάρχει επιρροή στο φαινόμενο ψήγματος. Όμως, εάν αυτό το σφάλμα δεν είναι σταθερό (ακόμα και εάν είναι συστηματικό) θα αυξήσουμε το φαινόμενο ψήγματος.

Συνδυασμός Μοντέλων

Όλα τα μοντέλα που εξετάσαμε ως τώρα περιγράφουν απλές καμπύλες ή ευθείες γραμμές. Τα ‘καθημερινά’ βαριογράμματα που συναντούμε στις μεταλλευτικές (και σε άλλες) εφαρμογές θα είναι συχνά πιο πολύπλοκα και κανένα από τα παραπάνω μοντέλα δεν θα φαίνεται κατάλληλο – μπορεί να απαιτείται ένα πιο εξεζητημένο σχήμα για να προσαρμόσουμε στην πειραματική καμπύλη.

Η προσαρμογή μοντέλων σε τέτοια βαριογράμματα γίνεται καλύτερα με συνδυασμούς δυο (ή περισσοτέρων) από τα παραπάνω μοντέλα. Αυτό είναι επιτρεπτό, διότι κάθε γραμμικός συνδυασμός έγκυρων μοντέλων είναι, επίσης, έγκυρος. Τα μοντέλα αυτά απλά προσθέτονται μεταξύ τους:

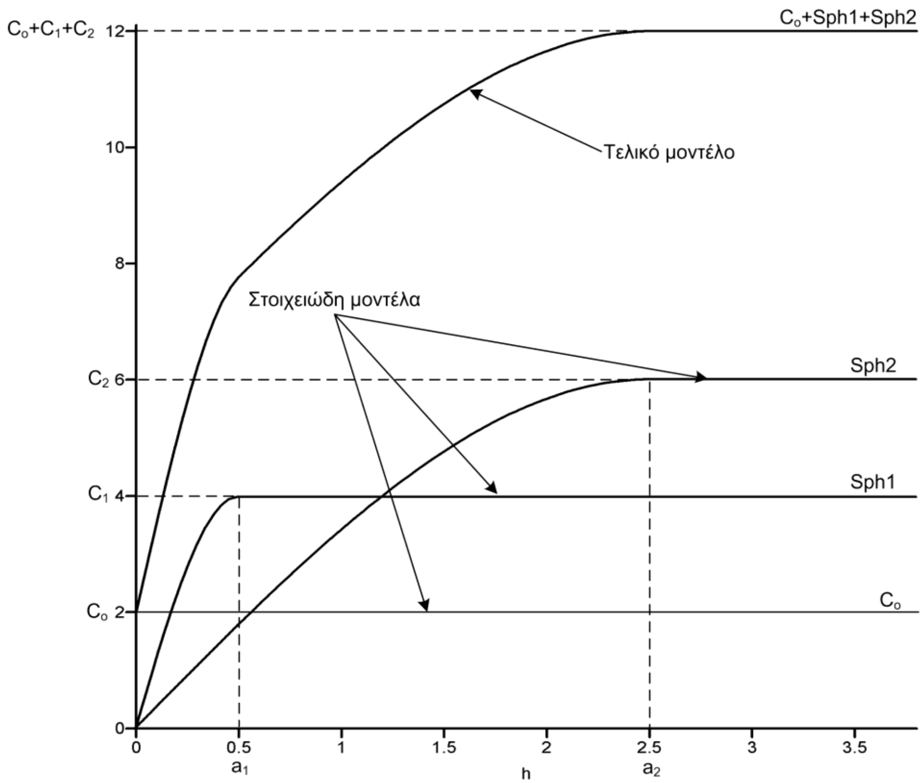
$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \gamma_3(h) + \ldots \qquad \textbf{Εξίσωση 4-12}$$

Ένας συνήθης συνδυασμός είναι η πρόσθεση ενός σφαιρικού μοντέλου και ενός μοντέλου φαινόμενου ψήγματος, που γίνεται συνήθως ως εξής:

$$\gamma(h) = Co + C\left[\frac{3}{2}\frac{|h|}{a} - \frac{1}{2}\frac{|h|^3}{a^3}\right], |h| \le a$$
$$\gamma(h) = Co + C, |h| > a$$

Για γεωλογικά δεδομένα, ιδιαίτερα για περιεκτικότητες ή γεωχημικά δεδομένα, συνηθίζεται να βλέπει κανείς δύο ή περισσότερα εμφανή χωρικά τμήματα στο βαριόγραμμα, γενικά ονομαζόμενα ‘ένθετες’ δομές (δείτε προηγούμενο κεφάλαιο). Το Σχήμα 4.12 δείχνει ένα παράδειγμα τέτοιου τύπου βαριογράμματος. Σημειώστε ότι αναφερόμαστε στα σφαιρικά μοντέλα ως Sph1 και Sph2. Γενικά, ένα φαινόμενο ψήγματος συν 2 ή 3 σφαιρικές δομές είναι αρκετά. Η πρόσθεση περισσότερων από 3 μοντέλα (συν το φαινόμενα ψήγματος) δεν οδηγεί συνήθως σε αξιοσημείωτη διαφορά στο σχήμα. Το ένθετο μοντέλο στο σχήμα 4.12 μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\gamma(h) = Co + C_1\left[\frac{3}{2}\frac{|h|}{a} - \frac{1}{2}\frac{|h|^3}{a^3}\right] + C_2\left[\frac{3}{2}\frac{|h|}{a} - \frac{1}{2}\frac{|h|^3}{a^3}\right], |h| \le a_1$$
$$\gamma(h) = Co + C_1 + C_2\left[\frac{3}{2}\frac{|h|}{a} - \frac{1}{2}\frac{|h|^3}{a^3}\right], a_1 < |h| \le a_2$$
$$\gamma(h) = Co + C_1 + C_2, |h| > a_2$$



Σχήμα 4.12: Παράδειγμα συνδυασμού μοντέλων.

Ανισοτροπικά Μοντέλα

Όλα τα μοντέλα που εξετάσαμε ως τώρα περιγράφουν ισοτροπικές καταστάσεις. Σε μια τέτοια περίπτωση, το βαριόγραμμα εξαρτάται μόνο από το μέτρο ή την απόλυτη τιμή του h, δηλαδή από το $|h|$ και όχι από τη διεύθυνση.

Όπως συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπάρχουν πολλές γεωλογικές καταστάσεις όπου περιμένουμε ανισοτροπία, δηλαδή όπου περιμένουμε τη μεταβλητότητα να διαφέρει ανάλογα με τη διεύθυνση στην οποία υπολογίζουμε το βαριόγραμμα. Εισάγαμε, στο Κεφάλαιο 3, τους δυο τύπους ανισοτροπίας:

1. Γεωμετρική ανισοτροπία
2. Ζωνική ανισοτροπία

Γεωμετρική Ανισοτροπία

Η γεωμετρική ανισοτροπία (ή ελλειπτική ανισοτροπία) μπορεί να διορθωθεί από έναν απλό γραμμικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων. Στην περίπτωση γεωμετρικής ανισοτροπίας, για ένα μεταβατικό βαριόγραμμα, η οριακή τιμή των βαριογραμμάτων σε κάθε διεύθυνση είναι η ίδια. Μόνο το εύρος διαφέρει. Στην περίπτωση ενός γραμμικού βαριογράμματος είναι η κλίση που εξαρτάται από τη διεύθυνση (δείτε πίσω στο σχήμα 3.6).

Μπορούμε να σχεδιάσουμε το εύρος (ή την κλίση, για την περίπτωση γραμμικού βαριογράμματος) ως συνάρτηση της διεύθυνσης. Για τη γεωμετρική ανισοτροπία, το διάγραμμα προσεγγίζει μια έλλειψη (σε 2Δ, ένα ελλειψοειδές σε 3Δ). Μια απλή αλλαγή στις συντεταγμένες μετασχηματίζει την έλλειψη αυτή σε κύκλο, εξαλείφοντας την ανισοτροπία. Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι, όταν υπολογίζουμε το πειραματικό βαριόγραμμα πρέπει να επιλέγουμε τουλάχιστον τέσσερις διευθύνσεις. Αυτό γιατί επιλέγοντας μόνο δυο διευθύνσεις μπορεί να μην είμαστε σε θέση να ανιχνεύσουμε μια γεωμετρική ανισοτροπία, ακόμα και αν υπάρχει (Σχήμα 3.7).

Η προσαρμογή του μοντέλου για τη γεωμετρική ανισοτροπία σε απλές περιπτώσεις παρουσιάζει μερικές δυσκολίες. Πρώτα, πρέπει να υπολογίσουμε το πειραματικό βαριόγραμμα σε τουλάχιστον τέσσερις διευθύνσεις στο επίπεδο, συν την κάθετη ή κατά μήκος της γεώτρησης διεύθυνση. Καθορίζουμε ποιες διευθύνσεις έχουν τα μεγαλύτερα και μικρότερα εύρη (αυτές μπορεί να μην αντιστοιχούν στους άξονες του πλέγματος πληροφοριών, γι’ αυτό θα πρέπει να δοθεί προσοχή). Για την περίπτωση δυο διαστάσεων θα υπάρχουν δυο βασικές διευθύνσεις σε ορθή γωνία μεταξύ τους. Σε τρεις διαστάσεις θα υπάρχουν τρεις αμοιβαία κάθετες βασικές διευθύνσεις. Προσαρμόζουμε ένα ανισοτροπικό μοντέλο στα πειραματικά βαριογράμματα σε αυτές τις βασικές διευθύνσεις ως εξής:

1. Προσαρμόζουμε το μοντέλο στο πειραματικό βαριόγραμμα για την ‘καλύτερα ορισμένη’ βασική διεύθυνση.
2. Επιλέγουμε το επόμενο καλό πειραματικό βαριόγραμμα σε μια από τις υπόλοιπες βασικές διευθύνσεις. Διαιρούμε το εύρος κάθε χωρικής δομής στο μοντέλο βαριογράμματος μας (δηλαδή το μοντέλο για τη διεύθυνση που προσαρμόζεται στο πρώτο βήμα) με κάποιο συντελεστή. Επιλέγουμε τους συντελεστές αυτούς έτσι ώστε το μοντέλο να είναι ‘συμπυκνωμένο’ (διαιρώντας με συντελεστές μεγαλύτερους από 1.0) ή ‘αραιωμένο’ (διαιρώντας με συντελεστές μικρότερους από 1.0) ώστε να πάρουμε ένα μοντέλο που να προσαρμόζεται στη δεύτερη βασική διεύθυνση.
3. Επαναλαμβάνουμε το δεύτερο βήμα για τις υπόλοιπες βασικές διευθύνσεις, όταν εργαζόμαστε σε τρεις διαστάσεις.

Γενικά ορίζουμε τους *ανισοτροπικούς παράγοντες* ή *ανισοτροπικούς λόγους* ως αριθμούς με τους οποίους διαιρούμε τα εύρη. Εάν το εύρος μιας δομής είναι 100m στην πρώτη διεύθυνση που προσαρμόζουμε, και χρειάζεται να είναι 50m στη δεύτερη, τότε ο ανισοτροπικός λόγος είναι 2.0. Αντίθετα, εάν το εύρος της δομής είναι 40m στην πρώτη διεύθυνση που προσαρμόζουμε, και χρειάζεται να είναι 80m στη δεύτερη, τότε ο ανισοτροπικός λόγος είναι 0.5.

Στα ένθετα μοντέλα, η ανισοτροπία είναι πολύπλοκη. Για παράδειγμα, οι λόγοι μπορεί να είναι διαφορετικοί για κάθε μια δομή. Σημειώστε, επίσης, ότι κάποια λογισμικά μπορεί να χρησιμοποιούν πολλαπλασιασμό αντί για διαίρεση.

Ένα Παράδειγμα

Οι ανισοτροπικοί λόγοι καθορίζονται συνήθως για κάθε διεύθυνση, ώστε ο αναγνώστης μιας αναφοράς να γνωρίζει ποια διεύθυνση είναι η διεύθυνση αναφοράς. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.21 στη μελέτη δομικής ανάλυσης (στο τέλος του κεφαλαίου αυτού) θα ορίσουμε το μοντέλο βαριογράμματος (σε 3Δ) όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.2:

Πίνακας 4.2: Μοντέλο βαριογράμματος (τα εύρη εκφράζονται χρησιμοποιώντας ανισοτροπικούς λόγους)			
	Ψήγμα	Sph1	Sph2
Οριακή Τιμή	0.026	0.017	0.034
Εύρος	0	20	150.
X-ανισ.	1.00	1.50	5.00
Y-ανισ.	1.00	1.00	1.00
Z-ανισ.	1.00	1.50	4.00

Στην περίπτωση αυτή το εύρος της μακρύτερης δομής (βορράς-νότος, ή διεύθυνση Y) προσαρμόζεται πρώτο. Παράλληλα σε ένα μοντέλο φαινόμενο ψήγματος (εύρος 0), προσαρμόστηκαν δυο ένθετα σφαιρικά μοντέλα, Sph1 και Sph2, με εύρη 20m και 150m αντίστοιχα. Οι ανισοτροπικοί λόγοι μας δίνουν τότε τα εύρη στις άλλες διευθύνσεις, με διαίρεση:

Πίνακας 4.3: Μοντέλο βαριογράμματος (τα εύρη είναι σε μέτρα εντός παρενθέσεων)			
	Ψήγμα	Sph1	Sph2
Οριακή Τιμή	0.026	0.017	0.034
Εύρος	0	20	150.
X-ανισ.	1.00(0m)	1.50(13.3m)	5.00(30m)
Y-ανισ.	1.00(0m)	1.00(20m)	1.00(150m)
Z-ανισ.	1.00(0m)	1.50(13.3m)	4.00(37.5m)

Σημειώστε ότι το μοντέλο φαινόμενο ψήγματος δεν έχει εύρος και είναι ισοτροπικό, εξ ορισμού.

Η ανισοτροπία είναι διαφορετική για τις δομές μικρής και μεγάλης κλίμακας: για την κοντινή δομή το μοντέλο είναι σχεδόν ισοτροπικό, ενώ για τη μακρινή δομή, υπάρχει έντονη ανισοτροπία. Θα συζητήσουμε το μοντέλο αυτό με περισσότερη λεπτομέρεια στη μελέτη, αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο.

Για απεριόριστα μοντέλα βαριογραμμάτων (πχ. μοντέλα δύναμης, γραμμικά μοντέλα) ο γραμμικός μετασχηματισμός για τη μοντελοποίηση της γεωμετρικής ανισοτροπίας εφαρμόζεται μεταβάλλοντας τον βαθμό του μοντέλου. Στην περίπτωση ενός γραμμικού μοντέλου, αυτός είναι απλά η κλίση.

Ανισοτροπία Ζώνης

Υπάρχει και πιο πολύπλοκη μορφή ανισοτροπίας σε ορισμένα κοιτάσματα, για παράδειγμα όπου υπάρχει διακριτή ζώνωση υψηλών και χαμηλών τιμών. Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητότητα στη διεύθυνση την παράλληλη με τη διεύθυνση της ζώνωσης μπορεί να είναι σημαντικά μικρότερη από ότι σε διεύθυνση κάθετη στη ζώνωση. Το σχήμα 3.8 έδειξε την ιδέα αυτή, που αποκαλείται συνήθως ζωνική ανισοτροπία.

Η ζωνική ανισοτροπία μπορεί να μοντελοποιηθεί στα περισσότερα γενικά μεταλλευτικά πακέτα. Ακόμα και όπου μπορεί να συμβεί αυτό, το μοντέλο συχνά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για kriging. Η μοντελοποίηση της ζωνικής ανισοτροπίας είναι πέρα από τους στόχους του μαθήματος μας. Όποιοι ενδιαφέρονται μπορούν να αναφερθούν στους Journel και Huijbregts (1978, σελ. 266-272) για μια μελέτη της.

Γιατί Όχι Αυτόματη Προσαρμογή;

Μια συνηθισμένη ερώτηση είναι: γιατί να μην προσαρμόσουμε το βαριόγραμμα αυτόματα; Οι γεωστατιστικοί είχαν πρόσβαση σε λογισμικό για αυτόματη μοντελοποίηση βαριογράμματος για χρόνια (ελάχιστα τετράγωνα, κλπ). Όμως, οι πιο έμπειροι γεωστατιστικοί προσαρμόζουν τα μοντέλα χειρονακτικά. Υπάρχουν δυο κυρίως λόγοι για αυτό. Πρώτα, η μοντελοποίηση πρέπει να λάβει υπόψη το γεγονός ότι τα πιο σημαντικά τμήματα του βαριογράμματος που θα πρέπει να προσαρμοστούν με ακρίβεια είναι στα διαστήματα κοντά στην αρχή. Συχνά, το πρώτο σημείο έχει ελάχιστα δείγματα, οπότε απαιτείται ένας συμβιβασμός ανάμεσα στον αριθμό ζευγών που συνεισφέρουν στο διάστημα (αξιοπιστία) και την ανάγκη για το μοντέλο να σέβεται τα σημεία κοντά στην αρχή. Σε πολλές περιπτώσεις αυτό γίνεται σχετικά εύκολα υποκειμενικά, αλλά είναι δύσκολο να γίνει αλγοριθμικά.

Δεύτερον, το πρόβλημα μας περιορίζεται όταν αντιμετωπίζουμε θορυβώδη (ή όχι καλά ορισμένα) πειραματικά βαριογράμματα, όπου είναι απαραίτητη σημαντική εξωτερική παρεμβολή στη διαδικασία μοντελοποίησης. Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιήσουμε *a priori* γεωλογική γνώση για να ρυθμίσουμε το εύρος μιας δομής, κάτι που δεν μπορεί να κάνει το λογισμικό. Απαιτείται ένα έξυπνος χειριστής με γνώση της συγκεκριμένης γεωλογίας.

Το σημείο αυτό δίνει έμφαση στο ότι η γεωστατιστική δεν προορίζεται για χρήση τύπου μαύρου κουτιού: εάν έχουμε πρόσβαση σε λογισμικό το οποίο κάνει αυτόματη προσαρμογή, θα πρέπει να τη χρησιμοποιήσουμε ως μια ‘πρώτη πρόβλεψη’ και στη συνέχεια να ρυθμίσουμε το μοντέλο έξυπνα για να πάρουμε μια ικανοποιητική τελική προσαρμογή.

Συστηματική Ερμηνεία Βαριογράμματος

Τα βιβλία περί γεωστατιστικής μπορεί να αφήσουν στον αναγνώστη την εντύπωση ότι η προσαρμογή βαριογραμμάτων είναι σχετικά εύκολη υπόθεση. Σε πολλές περιπτώσεις, ειδικά όταν έχουμε να κάνουμε με ακριβά μέταλλα, αυτό δεν είναι αλήθεια! Το να έχουμε μια συστηματική προσέγγιση είναι σημαντικό όταν κάνουμε για πρώτη φορά βαριογραφική ανάλυση. Θα αντιμετωπίσουμε αργότερα κάποια προβληματική βαριογραφία, αλλά για την ώρα θα εξετάσουμε τη συνηθισμένη διαδικασία για τη μοντελοποίηση βαριογραμμάτων.

Στην πραγματικότητα, η προσαρμογή μοντέλων βαριογραμμάτων είναι τόσο μια 'τέχνη' όσο και επιστήμη, με την έννοια ότι δεν είναι μια δραστηριότητα που πρέπει να εξισώνεται μια έναν μαθηματικό τύπο. Η επαναλαμβανόμενη εμπειρία στην προσαρμογή βαριογραμμάτων αυξάνει τις ικανότητες μας. Παρόλα αυτά, θα δώσουμε κάποιες οδηγίες που σκοπό έχουν να μας βοηθήσουν με τη μοντελοποίηση βαριογράμματος.

Προφανώς, δεν ισχύουν όλα τα παρακάτω σχόλια σε κάθε πειραματικό βαριόγραμμα που θα συναντήσετε. Όμως, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν για πρώτη φορά αντιμετωπίζουμε τη δομική ανάλυση να έχουμε μερικούς 'δείκτες'.

10 Βασικά Βήματα Όταν Εξετάζεται Ένα Βαριόγραμμα

Εξετάζουμε βασικά σημεία που θα πρέπει να δοθεί προσοχή όταν αντιμετωπίζουμε την πειραματική βαριογραφία. Να θυμάστε πάντα ότι το πειραματικό βαριόγραμμα είναι μια εκτίμηση του 'υποκείμενου' βαριογράμματος. Ως τέτοιο κάποια απόκλιση από το κανονικό είναι αναμενόμενη, λόγω της στατιστικής διακύμανσης.

1. **Ο αριθμός των ζευγών σε κάθε διάστημα του πειραματικού βαριογράμματος**

Ο αριθμός των ζευγών που συνεισφέρουν στο πρώτο διάστημα (το πρώτο σημείο του πειραματικού βαριογράμματος) μπορεί να είναι συχνά πολύ χαμηλός. Αυτό θα εξαρτάται από την ακριβή διάταξη δειγματοληψίας και την ανίχνευση που χρησιμοποιείται. Συνεπώς, το πρώτο σημείο μπορεί να μην είναι ιδιαίτερα αντιπροσωπευτικό. Κάποια λογισμικά αποδίδουν γραφικά στο πειραματικό βαριόγραμμα τον αριθμό των ζευγών που χρησιμοποιείται. Εφόσον υπάρχει κάποιος κατάλογος, μπορούμε να δούμε αν τα σημεία σε μικρά διαστήματα είναι αξιόπιστα.

Παρόλο που είναι δύσκολο να ισχύσουν κανόνες αυστηρά, λιγότερα από 30 ζεύγη είναι μάλλον αναξιόπιστα σε κάθε μεταλλευτική κατάσταση. Σημειώστε ότι ο αριθμός των ζευγών θα πρέπει να εξετασθεί σε σχέση με το μέγεθος του σετ δεδομένων, για ένα πειραματικό βαριόγραμμα με 2000 ζεύγη στο διάστημα No. 2, το διάστημα 1 μπορεί να θεωρηθεί αναξιόπιστο με 100 ζεύγη. Δείτε το Σχήμα 4.13α.

Ομοίως, σε μακρινά διαστήματα, ο αριθμός των ζευγών μειώνεται. Είναι εύκολο να δει κανείς το γιατί: με αυξανόμενη απόσταση φτάνουμε σε κάποιο σημείο όπου μόνο δείγματα στις άκρες του χώρου μας μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Μπορεί να δειχθεί θεωρητικά ότι το βαριόγραμμα μπορεί να γίνει επικίνδυνα αναξιόπιστο σε διαστήματα πέρα από το 1/3 της μέγιστης απόστασης δειγμάτων. Δείτε το Σχήμα 4.13β.

2. **Η ομαλότητα του πειραματικού βαριογράμματος**

Η ομαλότητα του πειραματικού βαριογράμματος στα σχήματα 4.13α και 4.13β μπορεί να αντιτεθεί στην πιο ακανόνιστη συμπεριφορά στα σχήματα 4.13γ και 4.13δ. Πολλοί παράγοντες μπορούν να συνεισφέρουν σε ακανόνιστα βαριογράμματα, και θα τους συζητήσουμε λεπτομερώς, στην ενότητα για προβληματικά βαριογράμματα παρακάτω. Παρόλα αυτά, μπορούν να διακριθούν δύο διαφορετικοί τύποι ακανόνιστης βαριογραφίας. Στο σχήμα 4.13γ, το πειραματικό βαριόγραμμα είναι πριονωτό σε μια κανονική πάνω-κάτω έννοια. Αυτό μπορεί να δείχνει φτωχή επιλογή διαστημάτων ή πιθανή χρήση / εξαίρεση μια πολύ υψηλής τιμής. Σε κάθε περίπτωση, η *δομή* είναι ακόμα εμφανής. Εάν αποκλείσουμε άλλες πηγές ανωμαλίας, αυτό το βαριόγραμμα μπορεί να μοντελοποιηθεί κατά τρόπο μέσου όρου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μερικές από τις τεχνικές που εξηγούνται στην ενότητα προβληματικών βαριογραμμάτων παρακάτω μπορεί να οδηγήσουν σε ένα πιο 'καθαρό' βαριόγραμμα.

Από την άλλη πλευρά, το σχήμα 4.13δ δείχνει ένα θορυβώδες βαριόγραμμα χωρίς προφανή δομή, και χωρίς το είδος της πριονωτής συμπεριφοράς του σχήματος 4.13γ. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να καταφύγουμε σε κάποιο άλλο είδος βαριογραφίας (σχετικά βαριογράμματα) ή μετασχηματισμό (κορμοί, κλπ, δείτε παρακάτω).

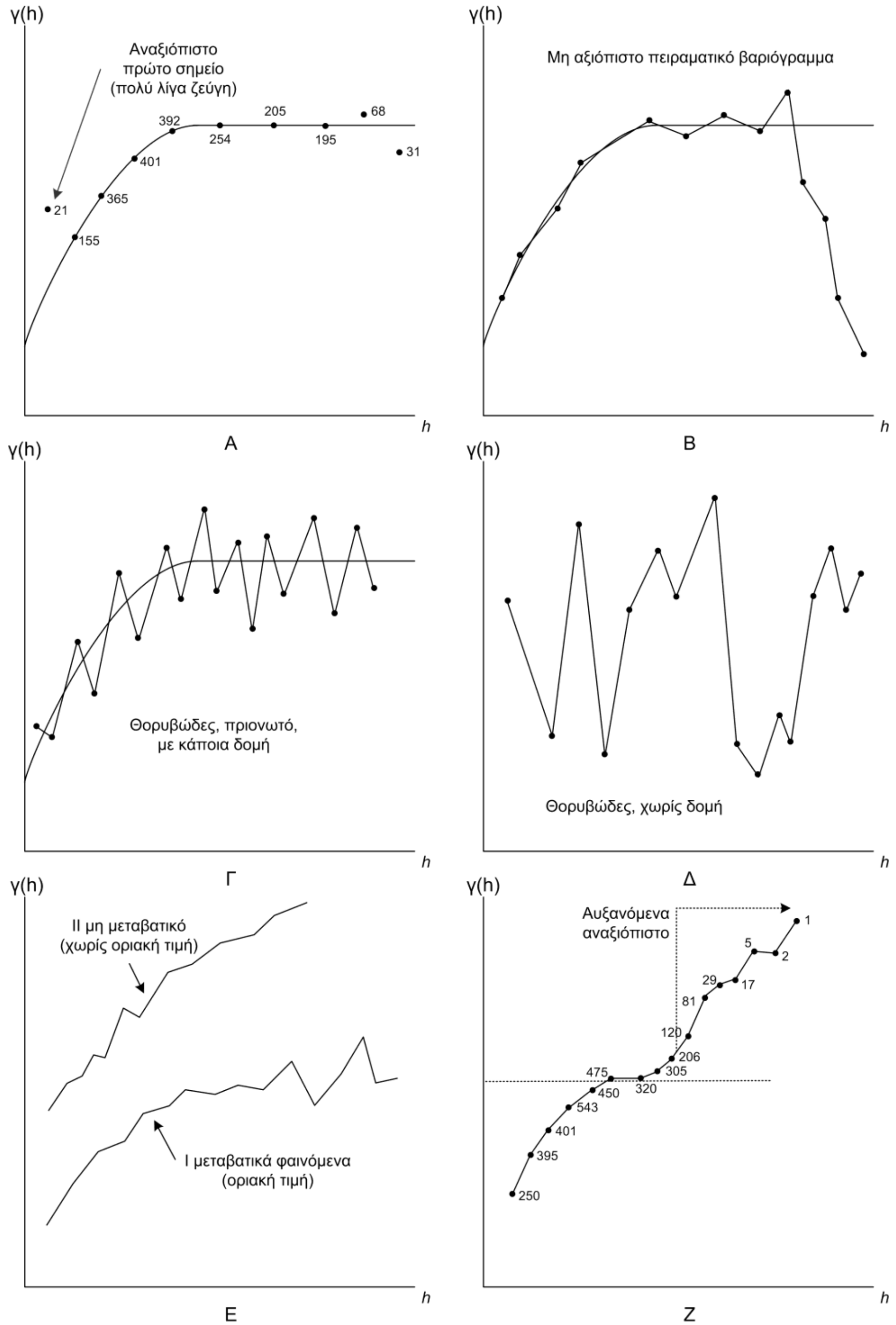
3. **Σχήμα κοντά στην αρχή**

Είναι σημαντικό να εξετάσουμε το σχήμα κοντά στην αρχή σωστά. Όπως έχουμε ήδη πει, τα πρώτα σημεία είναι μερικές φορές ύποπτα και αναξιόπιστα. Στις μεταλλευτικές εφαρμογές, ειδικά για μεταβλητές περιεκτικότητας, το σχήμα στην αρχή είναι σχεδόν πάντα γραμμικό. Αυτός είναι και ένας από τους λόγους που το σφαιρικό μοντέλο είναι τόσο δημοφιλές.

Εάν το πειραματικό μοντέλο συνιστά ένα παραβολικό σχήμα κοντά στην αρχή (όπως το μοντέλο του Gauss που εξετάσαμε νωρίτερα) θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί. Αντισταθείτε στον πειρασμό να προσαρμόσετε μοντέλα Gaussian! Η συνέπειες για το kriging είναι αρκετά εμφανείς: το μοντέλο του Gauss εκπροσωπεί υπερβολικά συνεχή, ομαλή συμπεριφορά μικρής κλίμακας ενός είδους που δεν έχει βρεθεί σε περιεκτικότητες ορυκτών. Στην περίπτωση τοπογραφικών μεταβλητών (βάθος έως μια γεωλογική επιφάνεια, το επίπεδο του ύδατος, το πάχος της φλέβας, κλπ) απαιτείται και πάλι προσοχή.

Εάν έχετε πεισθεί ότι μια τοπογραφική μεταβλητή είναι Gaussian, τότε πάντοτε να προσαρμόζετε το μοντέλο με ένα φαινόμενο ψήγματος (για να αποφεύγεται αστάθεια στο kriging). Σε πολλές περιπτώσεις, προτιμάτε ένα κυβικό μοντέλο, αν και το μοντέλο αυτό δεν είναι γενικά διαθέσιμο στο μεταλλευτικό λογισμικό.

Η κλίση του βαριογράμματος κοντά στην αρχή είναι ένας σημαντικός παράγοντας για το kriging. Μεγαλύτερο βάρος δίνεται γενικά στα πειραματικά σημεία κοντά στην αρχή όταν εξετάζεται η κλίση αυτή (δοσμένου ότι τα σημεία αυτά έχουν έναν λογικό αριθμό ζευγών). Σημειώστε ότι η κλίση είναι ανάλογη στο λόγο του εύρους προς την αναλογία του φαινόμενου ψήγματος.



Σχήμα 4.13: Συνηθισμένα στοιχεία 'πραγματικών' πειραματικών βαριογραμμάτων.

4. **Ασυνέχεια στην αρχή – φαινόμενο ψήγματος**

Παράλληλα με το σχήμα και την κλίση στην αρχή, η αναλογία του φαινόμενου ψήγματος είναι ένας σημαντικός παράγοντας στη μοντελοποίηση του βαριογράμματος. Οι περισσότερες μεταβλητές περιεκτικότητας έχουν κάποιο φαινόμενο ψήγματος. Η αναλογία του φαινόμενου ψήγματος σχετικά με την οριακή τιμή συχνά ονομάζεται *σχετικό φαινόμενο ψήγματος ε*, και μετριέται ως κλάσμα προς την οριακή τιμή:

$$\varepsilon = \frac{Co}{Co + C}$$

Το σχετικό φαινόμενο ψήγματος συχνά εκφράζεται ως ποσοστό. Το φαινόμενο ψήγματος είναι το ίδιο σε κάθε διεύθυνση (καθώς ορίζεται σε πολύ μικρές αποστάσεις ως προς το διάστημα της δειγματοληψίας). Εξαιτίας αυτού, στη μεταλλευτική γενικά χρησιμοποιούμε την κατά μήκος της γεώτρησης διεύθυνση για τον ορισμό του φαινόμενου ψήγματος και την τιμή αυτή για τις άλλες διευθύνσεις.

Σημειώστε επίσης ότι το σχετικό φαινόμενο ψήγματος εξαρτάται από το μήκος σύνθεσης (δηλαδή για μια δοσμένη χωρική κατανομή περιεκτικότητας, καθώς χρησιμοποιούμε μακρύτερες σύνθετες τιμές, το *ε* μειώνεται). Θα συζητήσουμε αυτά τα φαινόμενα (που σχετίζονται με το 'φαινόμενο στήριξης') με περισσότερη λεπτομέρεια στο επόμενο κεφάλαιο.

5. **Υπάρχει οριακή τιμή; - μεταβατικά φαινόμενα**

Το να απαντήσει κανείς σε αυτήν την ερώτηση μερικές φορές δεν είναι τόσο εύκολο όσο θα περιμέναμε. Για παράδειγμα, πάρτε το σχήμα 4.13ε. Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα ενός πειραματικού βαριογράμματος (I) που φανερά έχει οριακή τιμή. Όμως, το βαριόγραμμα II φαίνεται να συνεχίζει να αυξάνει. Μπορεί να έχουμε ένα γραμμικό (μη περιορισμένο) βαριόγραμμα, αλλά εξίσου, μπορεί να μην έχουμε φτάσει ακόμα το εύρος ενός μεταβατικού μοντέλου. Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε περιορίσει υπερβολικά τη ζώνη στην οποία υπολογίζουμε το βαριόγραμμα. Βέβαια πάλι μπορεί να έχουμε και τάση (δείτε παρακάτω).

Σημειώστε ότι, όσο το σχήμα της συνάρτησης που επιλέγουμε προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα καλά, ειδικά κοντά στην αρχή, η διαφορά μεταξύ της επιλογής ενός γραμμικού ή σφαιρικού μοντέλου (με πολύ μεγάλο εύρος) είναι αμελητέα.

Εάν το επίπεδο της οριακής τιμής δεν είναι καθαρά ορισμένο (για παράδειγμα στο σχήμα 4.13γ) τότε χρησιμοποιούμε το μέσο επίπεδο της μεταβολής. Εάν αυτό αντιστοιχεί στη διακύμανση των δεδομένων (όπως θα έπρεπε στη στάσιμη περίπτωση), η εμπιστοσύνη μας αυξάνεται. Παρόλο που η οριακή τιμή θα πρέπει να συμπέσει με τη συνολική διακύμανση, αυτό δεν συμβαίνει πάντα, για παράδειγμα λόγω της παρουσίας τάσεων μεγάλου εύρους στα δεδομένα. Σημειώστε ότι το επίπεδο της οριακής τιμής για τις μακρύτερες δομές σε ένα ένθετο μοντέλο έχει μικρό αντίκτυπο στα βάρη του kriging, ώστε στις περισσότερες περιπτώσεις η προσαρμογή του με μεγάλη ακρίβεια δεν είναι απαραίτητη.

6. Εκτίμηση του εύρους

Εάν έχουμε μεταβατικό μοντέλο, τότε χρειάζεται να εκτιμήσουμε το εύρος. Γενικά, το εύρος εκτιμάται οπτικά, ως η απόσταση στην οποία το πειραματικό βαριόγραμμα σταθεροποιείται στην οριακή τιμή. Σε πολλές περιπτώσεις, το εύρος είναι αρκετά φανερό, ειδικά για πειραματικά βαριογράμματα που προσεγγίζουν αρκετά ένα σφαιρικό σχήμα. Σε άλλες περιπτώσεις, μπορεί να μην είναι τόσο εύκολο.

Πρώτα, θα πρέπει να έχετε στο μυαλό σας ότι υπάρχουν κάποιοι μηχανισμοί για τον καθορισμό του εύρους ενσωματωμένοι στις λειτουργικές μορφές του μοντέλου που επιλέγουμε. Ιδιαίτερα, η γραμμική επέκταση της κλίσης στην αρχή θα πρέπει να τέμνει την οριακή τιμή στα 2/3 του εύρους για ένα σφαιρικό βαριόγραμμα. Εάν η οριακή τιμή είναι φανερή, ο εμπειρικός αυτός κανόνας μπορεί να είναι αρκετά χρήσιμος. Στην περίπτωση αυτή, η κλίση ελέγχεται από τα πρώτα αξιόπιστα σημεία του πειραματικού βαριογράμματος, όχι από αυτά που είναι κοντά στο εύρος. Ο προσεκτικός ορισμός των εύρων μικρότερων δομών (όταν είναι περισσότερες από μια δομές προφανείς) είναι πολύ σημαντικός.

7. Μπορούμε να δούμε μια τάση;

Η τάση δεν είναι τόσο εύκολο να ανιχνευθεί σε πολλές μεταλλευτικές καταστάσεις. Καταρχήν, σε διαστήματα περίπου το 1/3 της μέγιστης απόστασης μεταξύ των διαθέσιμων δειγμάτων, η θεωρία δείχνει ότι το βαριόγραμμα γίνεται ολοένα και πιο αναξιόπιστο. Έτσι ένα συνεχώς αυξανόμενο πειραματικό βαριόγραμμα, όπως αυτό του σχήματος 4.13ζ μπορεί να είναι αρκετά παραπλανητικό. Και πάλι, κοιτάμε την αντιπροσωπευτικότητα των ζευγών. Η εκτίμηση της τάσης θα πρέπει επίσης να γίνεται σε συνδυασμό με την εξέταση ενός χάρτη με τις θέσεις των δεδομένων ή ένα χάρτη ισοκαμπύλων. Ψάχνουμε να βρούμε τάσεις που να είναι φανερά υπεύθυνες.

Κάποια λογισμικά εκτυπώνουν, για κάθε διάστημα, τον αριθμό των ζευγών, τον μέσο τους και την ‘τάση’, η οποία είναι η μέση τιμή για τα ζεύγη του εκάστοτε διαστήματος. Φυσικά, η συστηματική αύξηση σε αυτήν τη στατιστική παράμετρο για μακρυνά διαστήματα είναι σημαντική μόνο εφόσον έχουμε αρκετά ζεύγη.

Ακόμα και όπου μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει τάση για μεγαλύτερα διαστήματα, αυτό μπορεί να έχει ελάχιστο αντίκτυπο στο kriging. Αυτό γιατί, όπως έχουμε πει πολλές φορές, το σχήμα του βαριογράμματος στα μικρότερα διαστήματα είναι σημαντικός παράγοντας για τα αποτελέσματα του kriging.

Στις περισσότερες μεταλλευτικές περιπτώσεις, η μοντελοποίηση της τάσης δεν είναι απαραίτητη. Εάν είναι, υπάρχουν τεχνικές, αλλά αυτές είναι πέραν του σκοπού αυτού του βιβλίου (αναφερθείτε στους Journel και Huijbregts, 1978, σελ. 313 ...).

8. Φαινόμενο οπής

Ένα φαινόμενο οπής εμφανίζεται ως μια κοιλιά στο βαριόγραμμα. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα πιο εμφανή ‘φαινόμενα οπής’ είναι, στην πραγματικότητα, ένα κατασκεύασμα της χρησιμοποιούμενης δειγματοληψίας, την έλλειψη ζευγών κλπ. παρόλο που υπάρχουν μοντέλα φαινόμενου οπής, είναι και αυτά περάν του σκοπού του βιβλίου και η χρήση τους δεν είναι συνηθισμένη.

9. **Ένθετα μοντέλα**

Δοσμένου ενός κατανοητού πειραματικού βαριογράμματος συνήθως χρειάζεται να μοντελοποιήσουμε περισσότερες από μια δομές. Στην απλή περίπτωση, εκτιμούμε το φαινόμενο ψήγματος, και μετά προσαρμόζουμε ένα μοναδικό, ας πούμε σφαιρικό, μοντέλο για το δομικό στοιχείο.

Σε πολλές περιπτώσεις, τα μεταλλευτικά δεδομένα παρουσιάζουν περισσότερα του ενός εύρη. Φανερές αλλαγές στα πειραματικά δεδομένα δείχνουν τα εύρη των ένθετων σφαιρικών μοντέλων. Θα δούμε πολλά παραδείγματα αυτής της συμπεριφοράς στη μελέτη στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Γενικά, όπου συγχωνεύονται πολλαπλά μοντέλα, η προσαρμογή του μοντέλου με το μικρότερο εύρος θα αποδειχθεί πιο κρίσιμη (από την άποψη του kriging).

10. **Ανισοτροπίες**

Είναι βασικό το πειραματικό βαριόγραμμα να υπολογίζεται σε τουλάχιστον τέσσερις διευθύνσεις στο επίπεδο, και σε γεωλογικά λογικούς προσανατολισμούς στην τρίτη διάσταση, για να ανιχνευθούν οι ανισοτροπίες. Η διαδικασία προσαρμογής ενός ανισοτροπικού μοντέλου συζητήθηκε σε προηγούμενο μέρος αυτού του κεφαλαίου. Απουσία ανιχνεύσιμης ανισοτροπίας, μπορεί να προσαρμοστεί ένα ισοτροπικό μοντέλο.

Μη-Συνεργάσιμα ή Προβληματικά Βαριογράμματα

Εάν τα πειραματικά βαριογράμματα που συναντάμε σε πραγματικές καταστάσεις ήταν τόσο καλά στη συμπεριφορά τους όσο αυτά που δίνονται στα διάφορα βιβλία, αυτή η ενότητα δεν θα ήταν απαραίτητη! Στην πραγματικότητα, είναι απίθανο να αποφύγουμε βαριογράμματα 'τρόμου' όπως αυτό στο σχήμα 4.13δ για πολύ καιρό (εάν εργαζόμαστε σε ορυχείο χρυσού, αυτό θα συμβεί νωρίτερα παρά αργότερα).

Θα προσεγγίσουμε το αντικείμενο των προβληματικών βαριογραμμάτων από δυο διαφορετικές πλευρές:

1. Μπορούμε να βελτιώσουμε τη βαριογραφία αλλάζοντας τις παραμέτρους υπολογισμού;
2. Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με κάποια πιο προηγμένη προσέγγιση από τον υπολογισμό του παραδοσιακού βαριογράμματος;

Υπολογισμός του Πειραματικού Βαριογράμματος

Εξετάζουμε εδώ έναν αριθμό από παράγοντες που θα πρέπει να ελέγξουμε πρώτα όταν αντιμετωπίζουμε προβληματικά βαριογράμματα. Τα αρχικά πειραματικά βαριογράμματα είναι συχνά πολύ ακανόνιστα και απαιτείται χρόνος, προσπάθεια και σκέψη για να δούμε το γιατί. Το άρθρο της Armstrong (1984) δίνει μερικά πολύ καλά παραδείγματα (μερικά από τα οποία δίνονται και εδώ).

Θεωρητικοί Λόγοι

Το πειραματικό βαριόγραμμα είναι μια *εκτίμηση* της χωρικής δομής. Έτσι, είναι συχνά ιδιαίτερα μεταβλητό για υψηλές τιμές του *h*. Διάφοροι ασχολούμενοι με τη γεωστατιστική έδειξαν ότι, όταν έχουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό από πυκνά δεδομένα (για παράδειγμα από γεωτρήσεις παραγωγής ή από μια προσομοίωση), υποσύνολα από αυτά τα δεδομένα μπορεί να έχουν ιδιαίτερα μεταβλητά ιστογράμματα και βαριογραφία.

Ορισμός Στάσιμων Ζωνών

Μερικές φορές ο λόγος για την κακή βαριογραφία είναι ότι υπολογίζουμε το βαριόγραμμα από δυο αναμεμειγμένους πληθυσμούς που έχουν διαφορετικά στατιστικά χαρακτηριστικά. Σε μια ακραία περίπτωση αυτό θα φανεί ως ιστόγραμμα με δυο κορυφές, αλλά αυτό δεν συμβαίνει πάντα (Armstrong, 1984). Εφόσον το βαριόγραμμα υποθέτει εσωτερική στασιμότητα, οι μεικτοί πληθυσμοί μπορούν να επηρεάσουν έντονα το πειραματικό βαριόγραμμα. Όπου είναι δυνατό, το βαριόγραμμα μας πρέπει να υπολογίζεται από έναν μοναδικό στατιστικό πληθυσμό.

Γεωγραφικά Ξεχωριστοί Πληθυσμοί

Εάν οι πληθυσμοί ξεχωρίζουν γεωγραφικά, δηλαδή μπορεί να γίνει το περίγραμμα τους σε χάρτες του κοιτάσματος, τότε το πρόβλημα μας είναι να ορίσουμε τα όρια των ζωνών μας. Αυτό είναι μερικώς επαναλαμβανόμενο, καθώς το βαριόγραμμα είναι ένα στοιχείο της ένδειξης που θα χρησιμοποιήσουμε για να διαχωρίσουμε γεωλογικές ζώνες. Ο συνδυασμός ζωνών με αρκετά διαφορετικά γεωστατιστικά χαρακτηριστικά μπορεί να οδηγήσει σε ελάχιστα ορισμένη και συχνά αδύνατη να ερμηνευτεί βαριογραφία.

Εναλλακτικά, εάν χωρίσουμε τις ζώνες σε υπερβολικά πολλές κατηγορίες, μπορεί να καταλήξουμε με πολύ λίγα δεδομένα σε κάθε ζώνη, και έτσι οι στατιστικές διακυμάνσεις να κυριεύουν την υποκείμενη χωρική δομή. Προφανώς, στη διαδικασία γίνονται πολλές δοκιμές για την απόκτηση της απαραίτητης εμπειρίας.

Αναμεμειγμένοι Πληθυσμοί

Το πρόβλημα μπορεί να είναι ακόμα πιο δύσκολο. Για παράδειγμα, εάν οι δυο πληθυσμοί σχετίζονται με μη διακριτή ανάμειξη, αλλά στατιστικά αντίθετες λιθολογίες, τότε ο μόνος τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα μπορεί να είναι η πιο λεπτομερής δειγματοληψία.

Ένα ακόμα παράδειγμα μεικτών πληθυσμών μπορεί να προέρχεται από δύο ή περισσότερα γεωτρητικά προγράμματα. Συμβαίνει συχνά τα παλαιότερα προγράμματα γεωτρήσεων να έχουν μικρότερη διάμετρο γεώτρησης, όχι καλή προετοιμασία δειγμάτων, κλπ. Το αποτέλεσμα είναι μια τεχνητά μεγαλύτερη διακύμανση για το παλιό πρόγραμμα γεωτρήσεων. Αυτό μπορεί να φανεί στις υψηλότερες οριακές τιμές, τα μικρότερα εύρη και σε ορισμένες ακραίες περιπτώσεις, τη φαινομενική συμπεριφορά καθαρού φαινόμενου ψήγματος του βαριογράμματος. Η Armstrong δίνει το παράδειγμα δυο προγραμμάτων γεωτρήσεων στο Σχήμα 4.14.

Καθορισμός Κατάλληλων Παραμέτρων Υπολογισμού Βαριογράμματος

Οι παράμετροι που σχετίζονται με τις ανοχές ανίχνευσης και την επιλογή των διαστημάτων είναι μερικές φορές πολύ ευαίσθητες.

Επιλογή Διαστήματος

Μια έντονα πριονωτή συμπεριφορά του πειραματικού βαριογράμματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.13γ, είναι μια προειδοποίηση ότι μπορεί να έχουμε λάθος επιλογή του διαστήματος. Εάν τα δεδομένα είναι ακανόνιστα διανεμημένα, το βασικό διάστημα που επιλέγουμε μπορεί να μην είναι προφανές, και μπορεί να συναντήσουμε την περίπτωση ο αριθμός των ζευγών σε διαδοχικά διαστήματα να αυξάνεται και να μειώνεται κυκλικά. Τα διαστήματα με λιγότερα ζεύγη θα είναι πιο ευάλωτα σε ακραίες τιμές, και θα τείνουν – κατά μέσο όρο – να έχουν υψηλότερες τιμές $\gamma(h)$.

Ανοχές

Ειδικά, η επιλογή των ανοχών διαστήματος και γωνίας μπορεί μερικές φορές να έχει δραστική επίπτωση στο βαριόγραμμα. Εάν το βαριόγραμμα φαίνεται άσχημο, δοκιμάζουμε μεγαλύτερες ανοχές. Έτσι, κατά μια έννοια, εξομαλύνουμε τα δεδομένα ώστε να μειώσουμε τον αντίκτυπο περιλαμβάνοντας ή εξαιρώντας ζεύγη σε ένα δοσμένο διάστημα. Η γωνιακή ανοχή μπορεί να είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη σε κάτι τέτοιο.

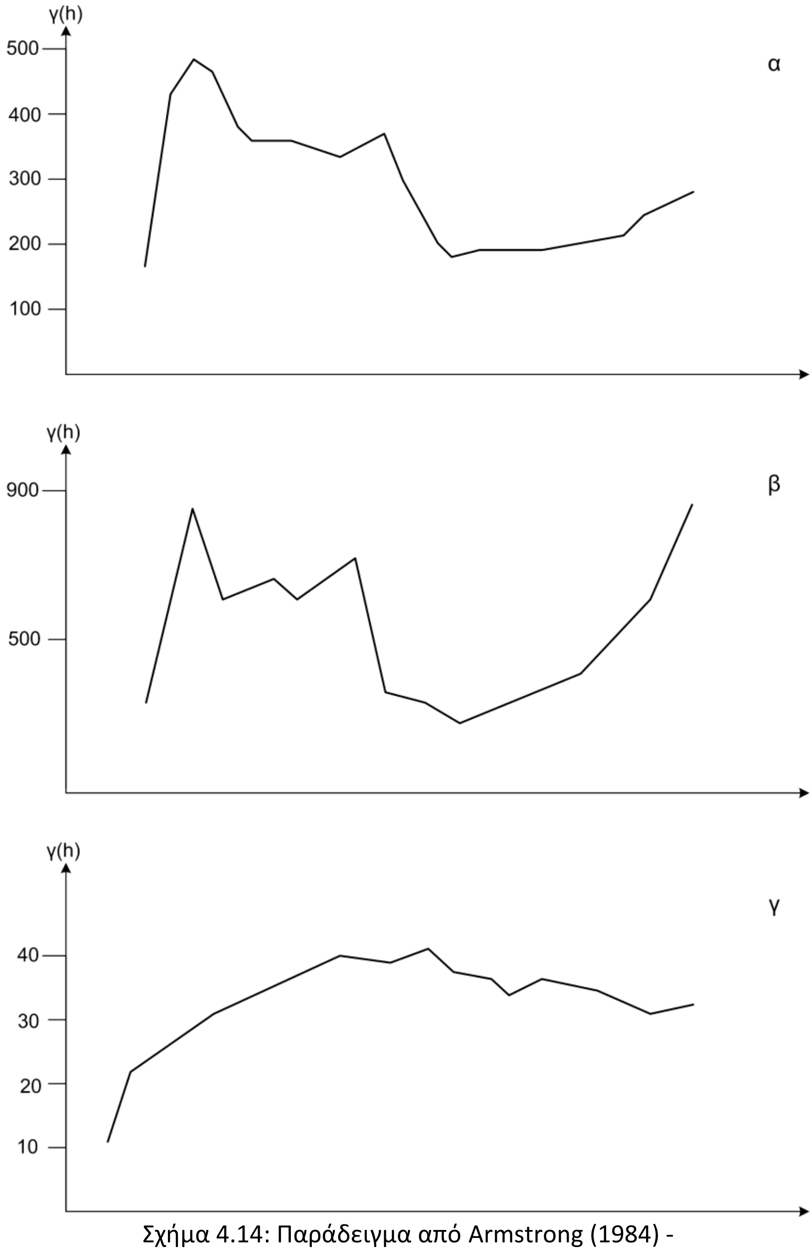
Τιμές που Λείπουν

Τα περισσότερα προγράμματα επιτρέπουν τον καθορισμό μια ελάχιστης τιμής που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του βαριογράμματος. Είναι συνηθισμένο να κωδικοποιούνται οι τιμές που λείπουν με έναν αρνητικό αριθμό, πχ -1. Εάν δεν ανιχνεύσουμε αυτές τις τιμές η επίπτωση μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη στο πειραματικό βαριόγραμμα εφόσον προσθέτουμε τεχνητό (και συχνά τυχαία τοποθετημένο) 'θόρυβο'.

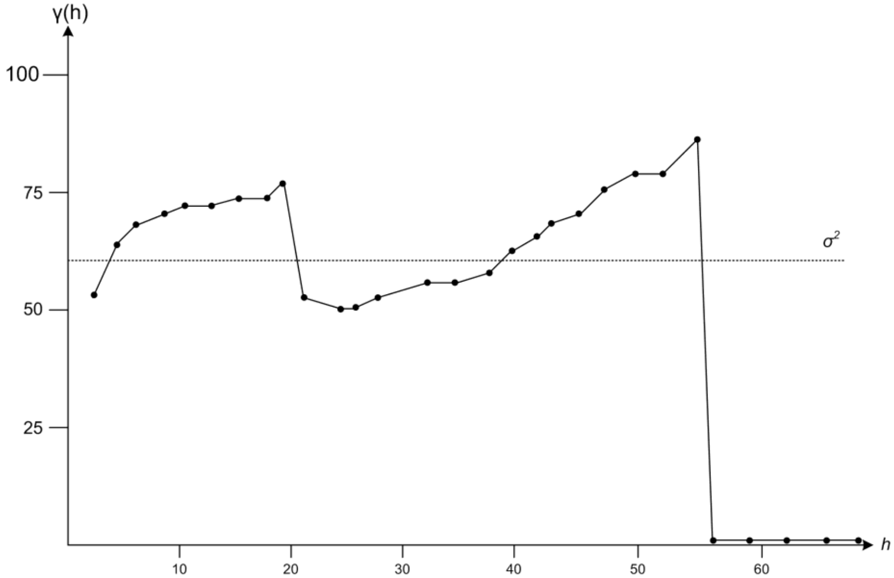
Ακραίες Τιμές

Θα συζητήσουμε μερικές προσεγγίσεις στη μοντελοποίηση βαριογραμμάτων με ακραίες τιμές παρακάτω (πχ. λογαριθμικά βαριογράμματα, σχετικά βαριογράμματα κλπ). Όμως, μια ειδική περίπτωση είναι αυτή στην οποία υπάρχει μια μεμονωμένη πολύ μεγάλη τιμή σε ένα σετ δεδομένων που αποτελείται κυρίως από μικρές τιμές. Το βαριόγραμμα θα μοιάζει σαν το Σχήμα 4.15, ένα βαριόγραμμα κατά μήκος γεώτρησης από μια μελέτη του Rivoirard (1987α).

Σημειώστε ότι, εφόσον οι μεγαλύτερες τιμές συχνά καθορίζουν τα οικονομικά ενός κοιτάσματος, η αφαίρεση τους θα πρέπει να είναι η τελευταία ενέργεια μιας επιστημονικής προσέγγισης.



Σχήμα 4.14: Παράδειγμα από Armstrong (1984) -
α: όλα τα δεδομένα β: δεδομένα παλαιού προγράμματος γ: δεδομένα νέου προγράμματος.



Σχήμα 4.15: Παράδειγμα του πιθανού αποτελέσματος μιας μοναδικής ακραίας τιμής σε ένα βαριόγραμμα κατά μήκος γεώτρησης.

Άλλες Προσεγγίσεις για τον Υπολογισμό Βαριογραμμάτων

Εκτός του κλασσικού πειραματικού βαριογράμματος των περιεκτικοτήτων:

$$\hat{\gamma}_a(h) = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left\{Z(x_i + h) - Z(x_i)\right\}^2\right]$$

υπάρχει ένας αριθμός από άλλες προσεγγίσεις για τον υπολογισμό πειραματικών βαριογραμμάτων. Τέτοιες προσεγγίσεις δαικρίνονται σε δυο γενικές κατηγορίες:

1. ‘Απρόσβλητοι’ εκτιμητές του βαριογράμματος (πχ σχετικά βαριογράμματα).
2. Βαριογραφία μετασχηματισμών (πχ λογαριθμική και Gaussian βαριογραφία, δείκτες, κλπ).

Εναλλακτικοί Εκτιμητές Βαριογράμματος

Οι εναλλακτικές λύσεις για τον υπολογισμό του πειραματικού βαριογράμματος μπορεί να αποδίδουν καλύτερα παρουσία ακραίων τιμών, και ειδικά για πολύ λοξά δεδομένα. Σε κάθε περίπτωση, ο στόχος των εναλλακτικών εκτιμητών είναι η δημιουργία μιας καθαρότερης προβολής της υποκείμενης χωρικής δομής. Αυτή η δομή μπορεί να είναι κρυμμένη σε ένα ακανόνιστο πειραματικό βαριόγραμμα.

Απρόσβλητοι Εκτιμητές

Πρώτα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι – εκτός των σχετικών βαριογραμμάτων (που είναι ‘απρόσβλητα’ σε μερικές περιπτώσεις, όπως θα δούμε) – ‘απρόσβλητοι’ εκτιμητές βαριογραμμάτων έχουν προταθεί από τους Cressie και Hawkins (1980) και πολλούς άλλους συγγραφείς. Αυτοί οι εκτιμητές αναπτύχθηκαν θεωρητικά και ο προορισμός τους ήταν να είναι εναλλακτικές λύσεις στον υπολογισμό του βαριογράμματος. Σπάνια υπάρχουν στο μεταλλευτικό λογισμικό. Ο David (1988) δίνει μια γενική εξέταση μερικών εναλλακτικών εκτιμητών.

Το κλασικό βαριόγραμμα είναι μάλλον το ίδιο καλό με οποιοδήποτε εναλλακτικό τρόπο εάν υπολογισθεί με εξυπνάδα και μοντελοποιηθεί με εμπειρία. Συνεπώς δεν θα εξετάσουμε αυτούς τους εκτιμητές με λεπτομέρεια.

Σχετικά Βαριογράμματα

Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα ‘απρόσβλητα’ βαριογράμματα είναι τα σχετικά βαριογράμματα. Υπάρχουν διάφοροι τύποι του σχετικού βαριογράμματος και είναι σημαντικό να καθοριστεί ακριβώς ποιο χρησιμοποιεί το λογισμικό σας. Τα σχετικά βαριογράμματα χρησιμοποιούνται στη δομική ανάλυση και το kriging από το 1970. Προωθήθηκαν ιδιαίτερα από τον Michel David και τους μαθητές του στο Μόντρεαλ (David, 1977, 1988).

Ο σκοπός των σχετικών βαριογραμμάτων είναι να αντισταθμίσει το αναλογικό φαινόμενο. Θυμηθείτε από το κεφάλαιο 2 ότι ένα αναλογικό φαινόμενο υπάρχει όταν υπάρχει σχέση μεταξύ του τοπικού μέσου και της αντίστοιχης τοπικής διακύμανσης. Ένα αναλογικό φαινόμενο είναι κανόνας στα λογαριθμικά κατανεμημένα δεδομένα και πολύ κοινό σε κοιτάσματα που εμφανίζουν λοξά (αλλά όχι απαραίτητα λογαριθμικά) ιστογράμματα. Εφόσον το αναλογικό φαινόμενο εμφανίζεται συχνά σε κοιτάσματα χρυσού, η χρήση του σχετικού βαριογράμματος μπορεί μερικές φορές να δίνει καλύτερη λύση στην υποκείμενη δομή όταν εξετάζονται δεδομένα χρυσού.

Τοπικό Σχετικό Βαριόγραμμα

Το τοπικό σχετικό βαριόγραμμα είναι ένας τρόπος να λάβουμε υπόψη την εξάρτηση του $\gamma(h)$ από τον τοπικό μέσο. Ορίζουμε περιοχές και χειριζόμαστε τα δεδομένα εντός κάθε περιοχής ξεχωριστά, δηλαδή ως ξεχωριστούς πληθυσμούς. Εάν παρατηρήσουμε ότι τα σχήματα των βαριογραμμάτων για κάθε μια από τις περιοχές μας είναι ίδια (με μόνο την οριακή τιμή να αλλάζει από τη μια περιοχή στην άλλη) τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα μοναδικό τοπικό σχετικό βαριόγραμμα $\gamma_{LR}(h)$. Αυτό το μοναδικό σχετικό βαριόγραμμα πρέπει στη συνέχεια να μπει σε κλίμακα του τοπικού μέσου για να πάρουμε το τοπικό βαριόγραμμα (Isaaks και Srivastava, 1989):

$$\gamma_{LR}(h) = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i(h) \frac{\gamma_i(h)}{m_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} N_i(h)}$$ **Εξίσωση 4-13**

όπου τα $\gamma_i(h)$ είναι τα βαριογράμματα για τις n τοπικές περιοχές που ορίζονται, m_i και N_i είναι οι αντίστοιχοι τοπικοί μέσοι και ο αριθμός των ζευγών δειγμάτων για κάθε περιοχή. Η παραπάνω εξίσωση κλιμακώνει κάθε τοπικό βαριόγραμμα με το τετράγωνο του τοπικού μέσου και στη συνέχεια τα συνδυάζει σε ένα ζυγισμένο μέσο (με βάση τον αριθμό των ζευγών δειγμάτων στον οποίο στηρίζεται το κάθε τοπικό βαριόγραμμα). Το τελικό τοπικό σχετικό βαριόγραμμα αποδίδει ένα γραμμικού τύπου αναλογικό φαινόμενο όπου η τοπική διακύμανση είναι ανάλογη του τετραγώνου του τοπικού μέσου. Εάν το αναλογικό φαινόμενο δεν είναι γραμμικό, θα πρέπει να ενσωματωθεί ένας κατάλληλος εναλλακτικός παράγοντας κλιμάκωσης στην παραπάνω έκφραση.

Είναι προφανές ότι αυτή η προσέγγιση στα τοπικά βαριογράμματα μπορεί να είναι υπολογιστικά δύσκολη (ανάλογα με το n) και επίσης ότι το επιμέρους τοπικά βαριογράμματα, από τα οποία φτιάχνουμε το $\gamma_{LR}(h)$ βασίζονται σε μικρότερο αριθμό δειγμάτων από το συνολικό σετ δεδομένων, μειώνοντας έτσι τη στατιστική αξιοπιστία του δημιουργούμενου συνδυαστικού σχετικού βαριογράμματος. Πράγματι, το $\gamma_{LR}(h)$ μπορεί να είναι καλύτερο από το $\gamma(h)$, ανάλογα με το πόσοι υπο-πληθυσμοί χρειάζεται να οριστούν. Αυτή η προσέγγιση στη σχετική βαριογραφία είναι κατά συνέπεια ασυνήθιστη.

Γενικό Σχετικό Βαριόγραμμα

Το γενικό σχετικό βαριόγραμμα $\gamma_{GR}(h)$ είναι ένα πιο συνηθισμένο σχετικό βαριόγραμμα. Δεν απαιτεί τον ορισμό υπο-πληθυσμών, ξεπερνώντας μια από τις κύριες δυσκολίες που έχουμε με την προσέγγιση του τοπικού σχετικού βαριογράμματος. Για το γενικό σχετικό βαριόγραμμα υπολογίζουμε για κάθε διάστημα:

$$\gamma_{GR}(h) = \frac{\gamma(h)}{\{m(h)\}^2}$$ **Εξίσωση 4-14**

όπου $\gamma(h)$ είναι απλά το κλασικό βαριόγραμμα, και $m(h)$ είναι ο μέσος όλων των δεδομένων τιμών που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση $\gamma(h)$ για το διάστημα h που εξετάζεται. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πειραματικού βαριογράμματος μπορεί εύκολα να διαμορφωθεί για τον υπολογισμό του $m(h)$ για κάθε διάστημα, ώστε το γενικό σχετικό βαριόγραμμα να είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί από υπολογιστικής πλευράς.

Σχετικό Βαριόγραμμα Ζευγών

Το γενικό σχετικό βαριόγραμμα $\gamma_{GR}(h)$ χρησιμοποιεί τον τετραγωνισμένο μέσο όλων των δεδομένων που συνεισφέρουν σε ένα δοσμένο διάστημα. Σε αντίθεση με αυτό, το σχετικό βαριόγραμμα ζευγών $\gamma_{PR}(h)$ επίσης χρησιμοποιεί το τετράγωνο του μέσου, αλλά η ρύθμιση γίνεται για κάθε ζεύγος $\{Z(x_i), Z(x_j)\}$ που εξετάζεται. Και πάλι, αυτή η ρύθμιση βοηθά στη μείωση της επίπτωσης πολύ μεγάλων τιμών στον υπολογισμό του βαριογράμματος. Η διόρθωση που γίνεται είναι:

$$\gamma_{PR}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum \frac{\{Z(x_i) - Z(x_j)\}^2}{\left(\frac{\{Z(x_i) + Z(x_j)\}}{2} \right)^2}$$ **Εξίσωση 4-15**

Μια προειδοποίηση που δίνουν οι Isaaks και Srivastava (1989) σχετικά με αυτού του είδους σχετικού βαριογράμματος είναι ότι όταν δυο τιμές που κάνουν ένα ζεύγος και οι δύο έχουν μηδενική τιμή (ή κοντά στο μηδέν) τότε ο μέσος τους είναι μηδέν, και διαιρούμε με το μηδέν στον τύπο. Αυτό σημαίνει ότι το $\gamma_{PR}(h)$ γίνεται ίσο με άπειρο. Για να το αποφύγουμε αυτό, οι μηδενικές τιμές πρέπει να γίνονται μικρές θετικές τιμές.

Σχετικό Βαριόγραμμα Διακύμανσης Ζεύγους

Μπορούμε επίσης να διορθώσουμε το βαριόγραμμα με τη διακύμανση των δεδομένων που συνεισφέρουν σε ένα δοσμένο διάστημα. Αυτή η διόρθωση μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικό ‘καθάρισμα’ θορυβωδών βαριογραμμάτων. Η οριακή τιμή ρυθμίζεται στην τιμή 1.0.

Μερικά Γενικά Σχόλια για τα Σχετικά Βαριογράμματα

Το θεωρητικό υπόβαθρο των σχετικών βαριογραμμάτων δεν είναι καλά κατανοητό. Όμως, έχουν αποδειχθεί πολύ χρήσιμα στην πράξη. Το kriging με ένα σχετικό βαριόγραμμα, ή η εκτέλεση επέκτασης ή ο υπολογισμός διασποράς διακύμανσης (στα επόμενα κεφάλαια) θα πρέπει να γίνεται προσεχτικά. Ιδιαίτερα, το γενικό σχετικό βαριόγραμμα (που είναι μάλλον το πιο συνηθισμένο από τα σχετικά βαριογράμματα) είναι ένας εκτιμητής, και συχνά υπερεκτιμά το υποκείμενο ‘πραγματικό’ σχετικό βαριόγραμμα (David, 1988). Στην περίπτωση αυτή, η διασπορά, η επέκταση και οι διακυμάνσεις του kriging επίσης θα εκτιμηθούν λανθασμένα.

Σημειώστε επίσης ότι οι δομές που παρατηρούνται στα σχετικά βαριογράμματα μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στον καθορισμό των εύρων όταν προσαρμόζεται ένα μοντέλο σε ένα συμβατικό πειραματικό βαριόγραμμα. Στην περίπτωση κοιτασμάτων χρυσού και άλλης μεταλλοφορίας με λοξές κατανομές, η σχετική βαριογραφία είναι συνήθως αρκετά ενδιαφέρουσα στον υπολογισμό της (και όχι ιδιαίτερα χρονοβόρα) ως μέρος του βήματος της συνολικής ανάλυσης των χωρικών δεδομένων και της δομικής μοντελοποίησης

Βαριογραφία Μετασχηματισμών

Πριν εξετάσουμε μερικούς κοινούς μετασχηματισμούς, θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε τις επιπλοκές μερικών από αυτών των προσεγγίσεων. Ιδιαίτερα, ο χρήστης θα πρέπει να κατανοήσει ότι:

- Πρώτο, όταν χρησιμοποιούμε ένα μετασχηματισμό που εφαρμόζεται σε όλες τις περιεκτικότητες, για παράδειγμα, παίρνοντας τους λογάριθμους, γενικά μεταβάλλουμε της διακυμάνσεις των διαφόρων δομών. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να καθορίσουμε κατευθείαν το σχετικό φαινόμενο ψήγματος, ή τη συνεισφορά μιας μικρού εύρους έναντι μιας μεγάλου εύρους χωρικής δομής με άμεση εξέταση του βαριογράμματος που στηρίζεται σε μετασχηματισμένες τιμές. Θα χρειαστούμε ένα αντίστροφο μετασχηματισμό (και αυτό σημαίνει περισσότερες παραδοχές).
- Δεύτερο, τα εύρη των δομών είναι γενικά αμετάβλητα από τέτοιους μετασχηματισμούς. Ο λόγος είναι φανερός: η απόσταση στην οποία, ας πούμε, οι λογάριθμοι των περιεκτικοτήτων χάνουν τον συσχετισμό είναι η ίδια με την απόσταση στην οποία οι ίδιες οι περιεκτικότητες γίνονται μη συσχετιζόμενες.

Μερικοί συνηθισμένοι μετασχηματισμοί είναι οι εξής:

Λογαριθμικός Μετασχηματισμός

Παίρνοντας τον λογάριθμο κάθε δείγματος πριν τον υπολογισμό του βαριογράμματος οδηγεί σε σημαντικά καλύτερη βαριογραφία. Σημειώστε ότι εδώ δεν αναφερόμαστε σε λογαριθμικότητα. Αυτό το βήμα είναι απλά ένας βολικός μετασχηματισμός εξάλειψης της λοξότητας που μας βοηθά να δούμε τα εύρη των δομών που προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε. Επειδή η λήψη των λογάριθμων μειώνει δραστικά το σχετικό μέγεθος των ακραίων τιμών, μειώνει την επιρροή ενός μικρού μέρους των πολύ υψηλών αναλύσεων στο πειραματικό βαριόγραμμα.

Όπως έχει ήδη ειπωθεί, το εύρος είναι η απόσταση στην οποία ζεύγη δειγμάτων παύουν να εμφανίζουν συσχετισμό. Λαμβάνοντας τον λογάριθμο όλων των δειγμάτων δεν μεταβάλλεται η απόσταση στην οποία ο συσχετισμός παύει να υπάρχει. Όμως, μπορεί να δούμε το εύρος καθαρά σε ένα βαριόγραμμα λογαρίθμων σε περιπτώσεις που το πειραματικό βαριόγραμμα των αρχικών τιμών είναι πολύ θορυβώδες και επομένως δύσκολο να ερμηνευτεί.

Σημειώστε επίσης ότι στην περίπτωση μιας λογαριθμικής κατανομής, το σχετικό βαριόγραμμα, το κλασικό βαριόγραμμα και το λογαριθμικό είναι επίσης θεωρητικά αντίστοιχα. Γενικά, θα εξετάσουμε διάφορες προσεγγίσεις ως μέρος της εκτίμησης της δύσκολης βαριογραφίας και θα χρησιμοποιήσουμε τις πληροφορίες που προκύπτουν για τη βελτίωση του μοντέλου που τελικά επιλέγουμε.

Στην περίπτωση μιας λογαριθμικής κατανομής, ένα τέτοιο βαριόγραμμα μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για λογαριθμικό kriging (αν και αυτή η μέθοδος θα πρέπει να αποφεύγεται όταν η κατανομή αποκλίνει από την αυστηρή λογαριθμικότητα).

Υπάρχουν μερικά αρχικά βήματα που θα πρέπει να ακολουθήσουμε προσεκτικά όταν αντιμετωπίζουμε τη λογαριθμική βαριογραφία. Αρχικά, οι μηδενικές και αρνητικές τιμές πρέπει να διορθωθούν προσεχτικά σε μικρές θετικές τιμές πριν πάρουμε τους λογάριθμους! Δεύτερον, υπάρχει το πρόβλημα των πολύ μικρών τιμών.

Εάν έχουμε πολύ μικρές τιμές στα δεδομένα μας, τότε η λήψη των λογάριθμων θα οδηγήσει σε μερικούς αρκετά αρνητικούς λογάριθμους. Οι τετραγωνισμένες διαφορές που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του βαριογράμματος μπορεί να γίνουν πολύ μεγάλες. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι μπορεί να κρύβουμε την υποκείμενη δομή, ή χειρότερα, να πάρουμε δομικά κατασκευάσματα λόγω των πολύ μικρών τιμών. Ο Rivoirard (1987) δίνει μια πολύ καλή μελέτη (από ένα κοίτασμα ουρανίου) όπου πολλές τιμές περιεκτικότητας ήταν πολύ μικρές ή κάτω από το όριο ανίχνευσης οδηγώντας σε δύσκολη βαριογραφία ακόμα και των λογάριθμων. Στη περίπτωση αυτή, επέλεξε να υπολογίσει το βαριόγραμμα για μια νέα μεταβλητή:

$$x + a$$

όπου α είναι μια σταθερή τιμή που προστίθεται σε κάθε δεδομένο. Αυτό οδηγεί σε δραστική μείωση των διαφορών των λογαρίθμων, βελτιώνοντας σημαντικά την ανάλυση της χωρικής δομής. Ο Rivoirard συνιστά μια τιμή του α που είναι κοντά στο μέσο, ή διάμεσο των δεδομένων. Η τιμή α είναι αντίστοιχη στη προσθετική σταθερή για μια τρι-παραμετρική λογαριθμική κατανομή.

Μετασχηματισμός Gauss

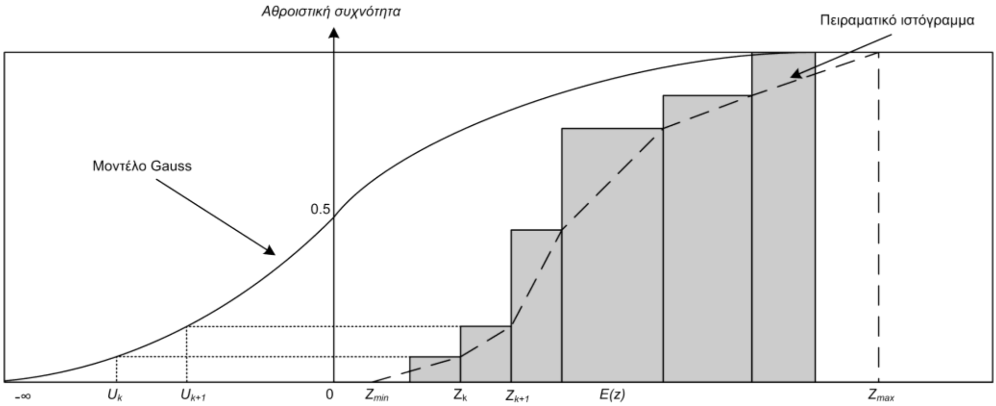
Ένας μετασχηματισμός Gauss είναι ένας μετασχηματισμός δεδομένων που οδηγεί σε ένα κανονικό ιστόγραμμα. Στην περίπτωση μιας λογαριθμικής κατανομής, λαμβάνοντας τους λογάριθμους οδηγούμαστε σε μια κατανομή Gauss ή κανονική. Επομένως, για μια λογαριθμική κατανομή, η λήψη των λογάριθμών είναι ένα μετασχηματισμός Gauss. Στη γενική περίπτωση, ένας μετασχηματισμός Gauss μπορεί να γίνει για μια οποιαδήποτε μοναδική κατανομή.

Και πάλι όμως, δεν αναφέρεται η κανονικότητα: ο μετασχηματισμός Gauss είναι απλά ένας βολικός τρόπος να διώξουμε τη λοξότητα και να μας επιτραπεί να δούμε τη χωρική δομή – δεν μπορεί να δημιουργήσει μια δομή εκεί που δεν υπάρχει! Μάλιστα, μετασχηματισμοί όπως ο Gaussian και ο λογαριθμικός μπορούν να θεωρηθούν ως φίλτρα δεδομένων. Ο συνήθης μετασχηματισμός του Gauss οδηγεί σε τιμές που έχουν ιστόγραμμα μιας τυπικής κανονικής κατανομής, δηλαδή με μέσο ίσο με 0 και μια διακύμανση ίση με 1. Επομένως, η οριακή τιμή του βαριογράμματος για μετασχηματισμένα κατά Gauss δεδομένα θα είναι 1.

Οι Journel και Huijbregts (1978) και ο Hohn (1988) δίνουν όλες τις λεπτομέρειες για τους μετασχηματισμούς Gauss. Υπάρχουν δυο τρόποι για να γίνουν: πρώτα, γραφικά (Σχήμα 4.16) και δεύτερον με την πολυωνυμική επέκταση Hermite. Η τελευταία μέθοδος είναι αντίστοιχη της πρώτης, αλλά μαθηματικά πιο χρήσιμη. Οι λεπτομέρειες των μετασχηματισμών Gauss κατά Hermite είναι εκτός του σκοπού του βιβλίου αυτού. Περιληπτικά, το πολυώνυμα Hermite είναι μια σειρά από χρήσιμες συναρτήσεις που, όταν προστίθενται, μπορούν να προσεγγίσουν τα περισσότερα σχήματα συναρτήσεων. Ο μετασχηματισμός είναι ο εξής:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$$

Σημειώστε ότι, κάτω από ορισμένες συνθήκες, οι διακυμάνσεις κάθε δομής σε ένα μοντέλο για ένα λογαριθμικό ή Gaussian βαριόγραμμα μπορούν να συσχετισθούν με το κλασικό βαριόγραμμα, κάτι που κάνει τα μοντέλα αυτά χρήσιμα για τον καθορισμό του φαινόμενου ψήγματος και των οριακών τιμών καθώς και των εύρων.



Σχήμα 4.16: Γραφικός τρόπος μετασχηματισμού Gauss.

Στην περίπτωση του μετασχηματισμού Gauss, αυτή η σχέση δίνεται από τον Guibal (1987) ως εξής:

$$\gamma_Z(h) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n^2}{n!} \left[1 - \left\{1 - \gamma_Y(h)\right\}^n\right] \qquad \textbf{Εξίσωση 4-16}$$

όπου $\gamma_Z(h)$ είναι το βαριόγραμμα σε όρους τιμών Z (πραγματικές), και $\gamma_Y(h)$ είναι το βαριόγραμμα των μετασχηματισμένων κατά Gauss τιμών. Εάν διατίθεται ο μετασχηματισμός Gauss, γενικά προτιμάται σε σχέση με τη χρήση λογαρίθμων και συνήθως αποδίδει καλύτερα. Αυτό γιατί ο λογαριθμικός μετασχηματισμός δεν οδηγεί γενικά σε μια κατανομή Gaussian – αυτό θα συμβεί μόνο εφόσον τα δεδομένα είναι αυστηρά λογαριθμικά κατανεμημένα (και αυτό συμβαίνει σπάνια).

Μετασχηματισμοί Δείκτη

Η χρήση δεικτών είναι μια διαφορετική στρατηγική για την εκτέλεση δομικής ανάλυσης με στόχο τον χαρακτηρισμό της χωρικής κατανομής των περιεκτικοτήτων. Στην περίπτωση αυτή, η μετασχηματισμένη κατανομή είναι *δυαδική*, και έτσι εξ ορισμού δεν περιέχει ακραίες τιμές. Επίσης, το βαριόγραμμα δείκτη για ένα συγκεκριμένο όριο εκμεταλλευσιμότητας z_c μπορεί να ερμηνευτεί φυσικά ως χαρακτηριστικό της χωρικής συνέχειας των δειγμάτων με περιεκτικότητες που ξεπερνούν το z_c. Πολλές πληροφορίες σχετικές με το θέμα αυτό υπάρχουν στις εργασίες του Andre Journel (πχ 1983, 1987, 1989).

Μια τυχαία μεταβλητή δείκτη $I(x,z_c)$ ορίζεται, σε μια θέση x, για το όριο z_c ως ο δυαδικός αριθμός ή συνάρτηση βήματος που υποθέτει την τιμή 0 ή 1 κάτω από τις παρακάτω συνθήκες:

$$I(x,z_c) = 0 \qquad \text{εάν } Z(x) \le z_c$$
$$I(x,z_c) = 1 \qquad \text{εάν } Z(x) > z_c \qquad \textbf{Εξίσωση 4-17}$$

Μετά τον μετασχηματισμό των δεδομένων, το βαριόγραμμα δείκτη μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από οποιοδήποτε πρόγραμμα γραμμένο για τον υπολογισμό ενός πειραματικού βαριογράμματος. Ένα *βαριόγραμμα δείκτη* είναι απλά το βαριόγραμμα των δεικτών.

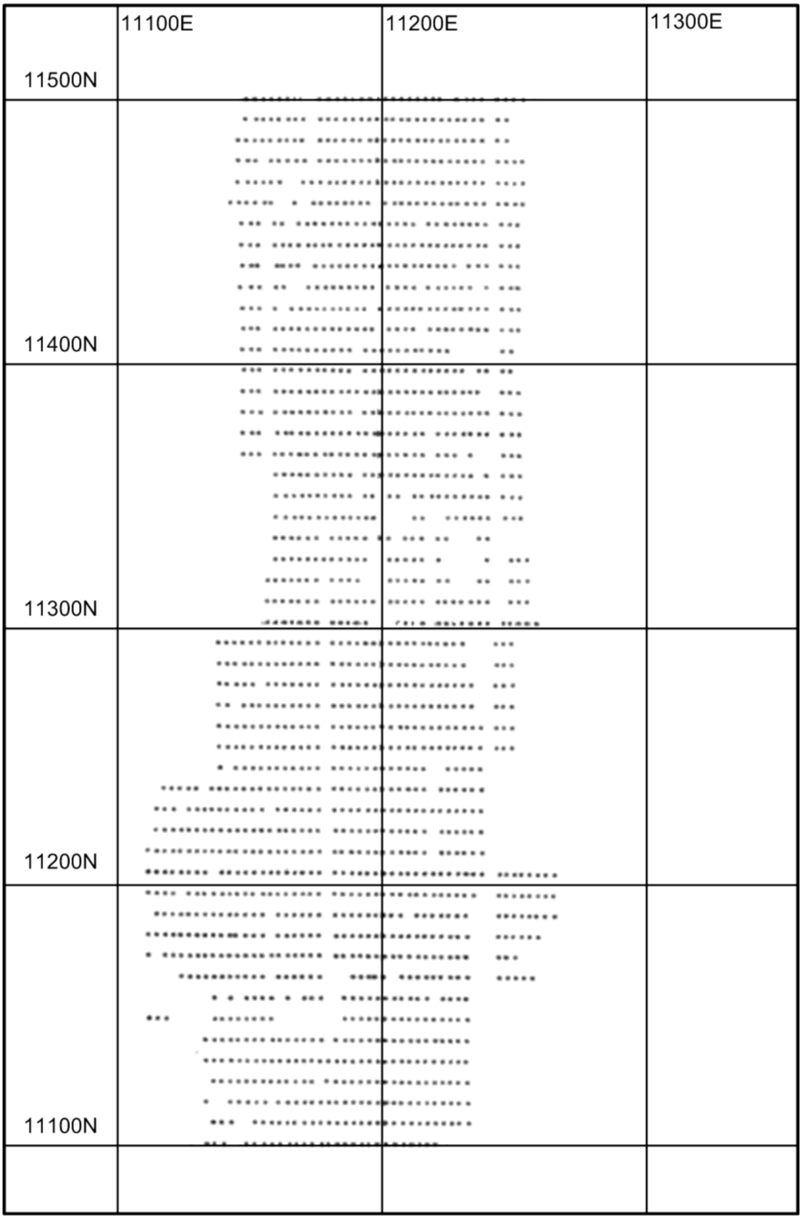
Εκτός από τις χρήσεις του για kriging δείκτη (indicator kriging, IK), kriging πιθανοτήτων (probability kriging, PK) και άλλες σχετικές τεχνικές, το βαριόγραμμα δείκτη μπορεί να είναι χρήσιμο όταν κάνουμε δομική ανάλυση για τον καθορισμό των μέσων διαστάσεων των μεταλλοφόρων σωμάτων σε διαφορετικά όρια εκμεταλλευσιμότητας, για παράδειγμα (Κεφάλαιο 8). Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την εφαρμογή μερικών από αυτές τις τεχνικές για δομική ανάλυση ενός κοιτάσματος χρυσού.

Παράδειγμα Μελέτης Βαριογραφίας

Η παρακάτω μελέτη σχεδιάστηκε να χαρακτηρίζει τη χωρική κατανομή του γνωστού κυρίως μεταλλεύματος σε ένα υπαίθριο ορυχείο χρυσού. Ο σκοπός της μελέτης ήταν η καθοδήγηση των επόμενων αναλύσεων μελλοντικών στρατηγικών γεωτρήσεων και μεθοδολογιών εκτίμησης. Όμως, η συνολική προσέγγιση δίνει ένα παράδειγμα της διαδικασίας της δομικής ανάλυσης.

Δεδομένα

Ο έλεγχος περιεκτικότητας στο ορυχείο γινόταν χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα ενός kriging. Το kriging βασιζόταν σε αναλύσεις χρυσού από δείγματα κάθετων γεωτρήσεων παραγωγής (ΓΠ) 5m. Τα αρχικά δεδομένα ΓΠ είναι οι πιο ακριβείς πληροφορίες περιεκτικότητας που διαθέτονται για το ορυχείο (Σχήμα 4.17).



Σχήμα 4.17: Παράδειγμα θέσεων δειγμάτων.

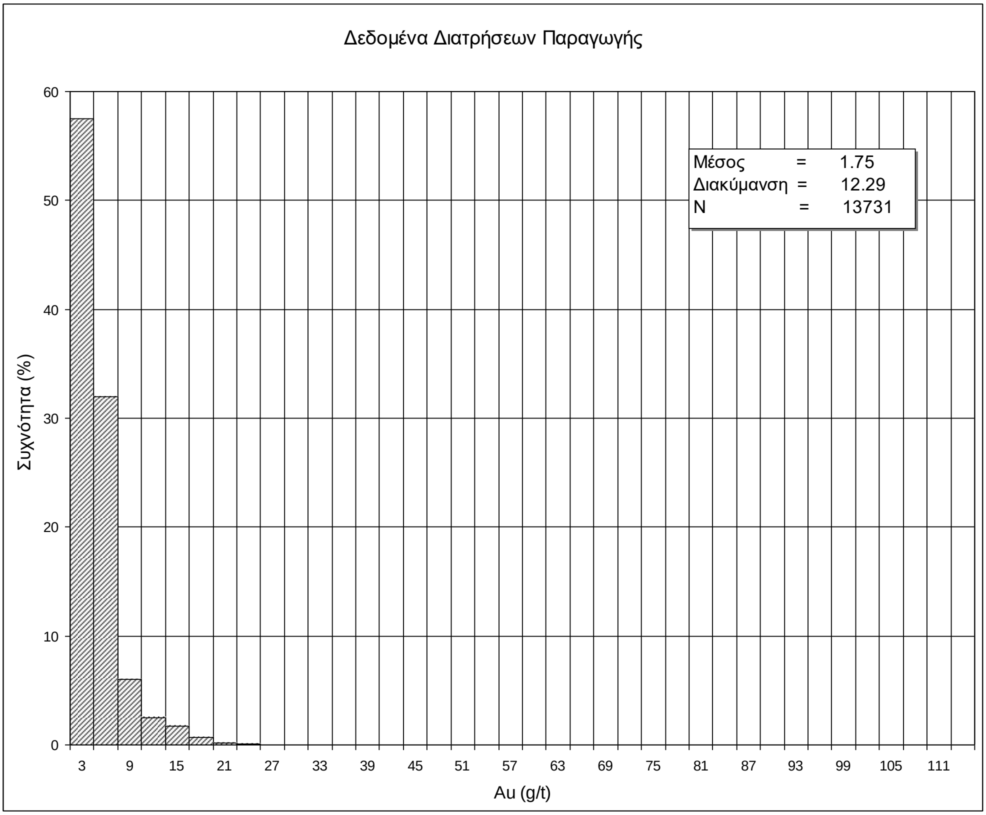
Το αρχικό στάδιο της μελέτης ήταν η κωδικοποίηση των δεδομένων εντός της ζώνης γεωλογικού ενδιαφέροντος. Οι ΓΠ έγιναν κυρίως σε διαστήματα 3 x 8m αλλά σε μερικές περιοχές και σε 3 x 4m. Γεωτρήσεις τις δεύτερης διάταξης αποκλείστηκαν. Αυτό έγινε για να εξασφαλιστεί η σταθερότητα στη στατιστική και τη βαριογραφία.

Πλεονεκτήματα του Σταθερού Διαστήματος

Ένας άλλος λόγος που η σταθερή διάταξη δειγματοληψίας είναι επιθυμητή είναι ότι επιτρέπει την κατασκευή ενός μοντέλου μπλοκ στο οποίο, κατά μέσο όρο, κάθε μπλοκ περιέχει μόνο ένα δείγμα ΓΠ. Αυτό είναι χρήσιμο εάν πρόκειται να υπολογιστούν έγκυρες στατιστικές και επίσης έχει σημαντικά πλεονεκτήματα από την άποψη της υπολογιστικής αποτελεσματικότητας κατά τον υπολογισμό βαριογραμμάτων.

Ιστόγραμμα

Το ιστόγραμμα δίνεται στο Σχήμα 4.18 παρακάτω:



Σχήμα 4.18: Ιστόγραμμα δεδομένων ΓΠ.

Σημειώστε ότι:

- Ο συντελεστής μεταβλητότητας ή η ‘σχετική τυπική απόκλιση’ ξεπερνά το 2.0.
- Το ιστόγραμμα είναι ασύμμετρο, με ξεκάθαρη θετική λοξότητα, δηλαδή λοξεύει δεξιά, με μια ουρά υψηλών τιμών.
- Ο μέσος ξεπερνά τον διάμεσο κατά περίπου 1.0 g/t.
- Τα δεδομένα μπορεί να περιέχουν μερικές τιμές που είναι ‘ακραίες’ με την έννοια ότι είναι πολύ υψηλές (πχ. η τιμή 115 g/t).

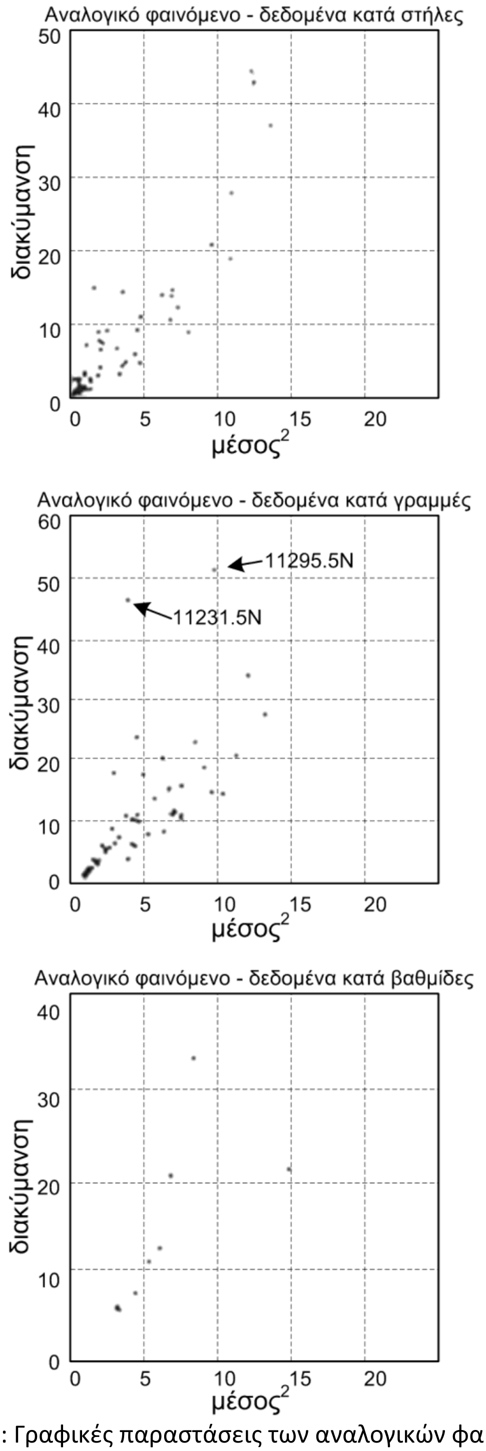
Οι παραπάνω παρατηρήσεις δείχνουν ότι θα είναι δύσκολο να γίνουν εκτιμήσεις για αυτήν τη μεταλλοφορία. Η παρουσία ενός μικρού ποσοστού υψηλών περιεκτικοτήτων, όπως υπονοείται από τη λοξή κατανομή, είναι συχνά μια προειδοποίηση για θορυβώδη βαριογράμματα περιεκτικότητας. Μερικές πολύ υψηλές τιμές μπορεί να έχουν μεγάλη επιρροή σε ένα πειραματικό βαριόγραμμα (Rivoirard, 1987α). Κοιτάσματα με συντελεστή μεταβλητότητας πάνω από το 1.0 (κοιτάσματα χρυσού και ουράνιου, για παράδειγμα) είναι συχνά δύσκολα από την άποψη της βαριογραφίας και εκτίμησης (Isaaks και Srivastava, 1989).

Αναλογικό Φαινόμενο

Νωρίτερα μάθαμε ότι ένα αναλογικό φαινόμενο υπάρχει όταν η τοπική διακύμανση είναι ανάλογη στον τοπικό μέσο. Για παράδειγμα, οι λογαριθμικές κατανομές *πάντα* παρουσιάζουν ένα αναλογικό φαινόμενο.

Το Σχήμα 4.19 δείχνει γραφικές παραστάσεις της διακύμανσης (s^2) έναντι του τετραγωνισμένου μέσου (m^2) για στήλες, γραμμές και επίπεδα στο μοντέλο μπλοκ. Φυσικά η απεικόνιση της τυπικής απόκλισης έναντι του μέσου είναι αντίστοιχη. Ένα αναλογικό φαινόμενο υπάρχει εφόσον η διακύμανση των περιεκτικοτήτων σε μια στήλη/γραμμή/βαθμίδα συστηματικά αυξάνει με τη μέση περιεκτικότητα αυτής της στήλης/γραμμής/βαθμίδας.

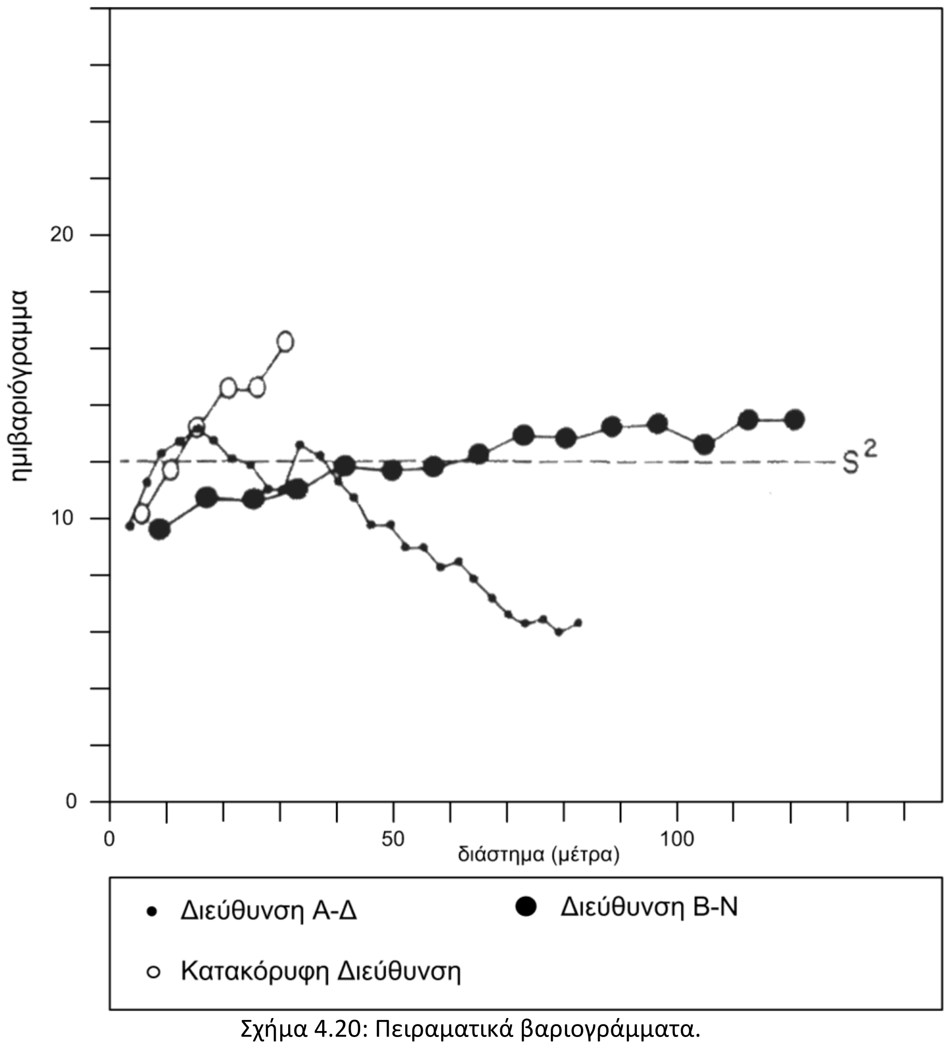
Σημειώνουμε ότι το αναλογικό φαινόμενο δεν είναι αυστηρά γραμμικό, ενώ τουλάχιστο ένα από τα στοιχεία του αναλογικού φαινομένου είναι τετραγωνικό στη φύση του.



Σχήμα 4.19: Γραφικές παραστάσεις των αναλογικών φαινομένων.

Βαριογράμματα

Το βαριόγραμμα μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε τη χωρική κατανομή (ή συνέχεια) της μεταλλοφορίας για ερμηνευτικούς σκοπούς, και μας δίνει μια δομική συνάρτηση για το kriging. Ο σκοπός της βαριογραφίας σε αυτή τη μελέτη ήταν ο χαρακτηρισμός της μεταλλοφορίας, ειδικά σε σχέση με την κατανομή του υλικού υψηλής περιεκτικότητας.



Σχήμα 4.20: Πειραματικά βαριογράμματα.

Οι σύνθετες τιμές ΓΠ, που είναι στους κόμβους του μοντέλου μπλοκ, είναι κανονικά διατεταγμένες, σε διαστήματα 8m στη διεύθυνση βορράς-νότος (Y), 3m στη διεύθυνση ανατολή-δύση (X) και 5m στην κάθετη διεύθυνση (Z). Ο υπολογισμός του βαριογράμματος είναι εύκολη υπόθεση για δεδομένα σε κανονική διάταξη. Ο καθορισμός των διαστημάτων υπολογισμού του βαριογράμματος είναι απλός σε μια τέτοια περίπτωση: τα διαστήματα επιλέγονται να αντιστοιχούν στις διαστάσεις της μονάδας του μοντέλου μπλοκ.

Το Σχήμα 4.20 δείχνει πειραματικά βαριογράμματα διαφόρων διευθύνσεων υπολογισμένα για τη ζώνη ενδιαφέροντος. Η διακύμανση των δεδομένων ΓΠ δίνεται στο σχήμα 4.20 (και στα επόμενα σχήματα) με μια διακεκομμένη γραμμή.

Για λόγους ευκρίνειας, δείχνονται μόνο τα πειραματικά βαριογράμματα των κυρίων διευθύνσεων του μοντέλου μπλοκ. Οι ενδιάμεσες διευθύνσεις (ΒΔ-ΝΑ και ΒΑ-ΝΔ), παρόλο που υπολογίζονται σε κάθε περίπτωση, δεν δείχνονται στις παραστάσεις.

Το πειραματικό βαριόγραμμα συνιστά ένα υψηλό σχετικό φαινόμενο ψήγματος (ε) δηλαδή οι πειραματικές γραφικές παραστάσεις εάν επεκταθούν στον άξονα $\gamma(h)$ θα τον τέμνουν σε επίπεδο κοντά στη διακύμανση των δειγμάτων ΓΠ.

Το βαριόγραμμα στη διεύθυνση ΑΔ αποδίδει μια μοναδική χωρική δομή με φαινόμενο εύρος περίπου 15-20 μέτρα. Η πτώση στο $\gamma(h)$ σε διαστήματα πέρα από τα 40m στη διεύθυνση ΑΔ οφείλεται κυρίως στον προοδευτικά μικρότερο αριθμό ζευγών που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του $\gamma(h)$ σε αυτά τα διαστήματα. Θυμηθείτε ότι το πειραματικό βαριόγραμμα δεν μπορεί να θεωρηθεί αυστηρά αξιόπιστο σε αποστάσεις πέρα από το ένα τρίτο της μέγιστης διαθέσιμης απόστασης διαστήματος.

Πιθανή Έλλειψη Στασιμότητας

Το βαριόγραμμα στην κάθετη διεύθυνση είναι δομημένο αλλά δεν φτάνει μια οριακή τιμή. Σημεία πέρα από τα 30m στο σχήμα 4.20 συνεχίζουν να αυξάνουν, αλλά βασίζονται, όπως και στην περίπτωση μακρινών διαστημάτων στο βαριόγραμμα ΑΔ, σε πολύ λίγα ζεύγη δειγμάτων για να θεωρούνται αξιόπιστα. Ήταν γνωστό ότι μια αυξανόμενη τάση στην περιεκτικότητα υπήρχε για τις κατώτερες βαθμίδες της ζώνης ενδιαφέροντος και αυτή η πιθανή έλλειψη στασιμότητας που παρατηρείται μπορεί να δίνει μια εξήγηση για τη φαινόμενη συμπεριφορά του βαριογράμματος στην κάθετη διεύθυνση. Το βαριόγραμμα στη διεύθυνση ΒΝ αυξάνει μέχρι μια απόσταση περίπου 50-60 μέτρων και μετά σταθεροποιείται περίπου στο επίπεδο της *a priori* διακύμανσης.

Σχετικά Βαριογράμματα

Δεδομένης της παρουσίας αναλογικών φαινομένων, τα σχετικά βαριογράμματα θα αναμενόταν να είναι πιο δομημένα από το ‘αφελές’ βαριόγραμμα (δηλαδή όπως υπολογίστηκε παραπάνω).

Σχετικό Βαριόγραμμα Ζευγών

Υπάρχει ένας αριθμός διαφορετικών τρόπων υπολογισμού των σχετικών βαριογραμμάτων (David, σελ. 42-49 και Isaaks και Srivastava, σελ. 163-170 για λεπτομέρειες). Ο David πρωτοπόρησε στη χρήση σχετικών βαριογραμμάτων, και παρόλο που αμφισβητήθηκε η θεωρητική τους ορθότητα, μπορεί να είναι πολύ χρήσιμα εργαλεία στην αποκάλυψη της δομής σε δεδομένα όπου η βαριογραφία επηρεάζεται από πολύ υψηλές τιμές. Το συγκεκριμένο σχετικό βαριόγραμμα που χρησιμοποιείται εδώ είναι ένα σχετικό βαριόγραμμα ζευγών που τυποποιείται με τη διακύμανση των διαστημάτων, και συζητήσαμε νωρίτερα στο κεφάλαιο αυτό.

Το σχετικό βαριόγραμμα εδώ τυποποιείται σε μια οριακή τιμή 1.0. Το Σχήμα 4.21 δείχνει σχετικά βαριογράμματα κατά διεύθυνση για τη ζώνη ενδιαφέροντος. Στην περίπτωση ενός γραμμικού αναλογικού φαινομένου, ένα σχετικό βαριόγραμμα θα 'δούλευε' καλά. Σε αυτήν την περίπτωση, τα αναλογικά φαινόμενα φάνηκαν να μην είναι τελείως γραμμικά, αλλά το σχετικό βαριόγραμμα αποκαλύπτει παρόλα αυτά περισσότερη δομή από το 'αφελές' βαριόγραμμα. Με αναφορά στο σχήμα 4.21, σημειώστε τα παρακάτω:

- Το πειραματικό σχετικό βαριόγραμμα ακόμα συνιστά ένα υψηλό σχετικό φαινόμενο ψήγματος (ε) αν και μάλλον μικρότερο από ότι στο 'πραγματικό' βαριόγραμμα.
- Στη διεύθυνση ΑΔ υπάρχει μια μικρής κλίμακας δομή με φαινόμενο εύρος περίπου 15-20 μέτρα. Επίσης εμφανής είναι μια πιθανή μεγαλύτερης κλίμακας δομή με εύρος στα 30-40 μέτρα περίπου. Η πτώση στο $\gamma(h)$ σε διαστήματα πέρα από το 40m που φαίνεται στο βαριόγραμμα δεν παρατηρείται στο σχετικό βαριόγραμμα.
- Το σχετικό βαριόγραμμα στην κάθετη διεύθυνση επίσης αυξάνει χωρίς να φτάνει σε οριακή τιμή.
- Το σχετικό βαριόγραμμα στη διεύθυνση ΒΝ έχει μια αναπήδηση στο δεύτερο διάστημα που είναι ενδεικτική μιας μικρής κλίμακας δομής. Αυτή η αναπήδηση είναι ελαφρώς εμφανής στο κλασικό βαριόγραμμα, και αποκαλύπτεται καλύτερα στο σχετικό βαριόγραμμα ζευγών. Η μεγαλύτερης κλίμακας δομή που φαίνεται στο βαριόγραμμα είναι επίσης καθαρότερη στο σχετικό βαριόγραμμα, με φαινόμενο εύρος περίπου τα 100 μέτρα.

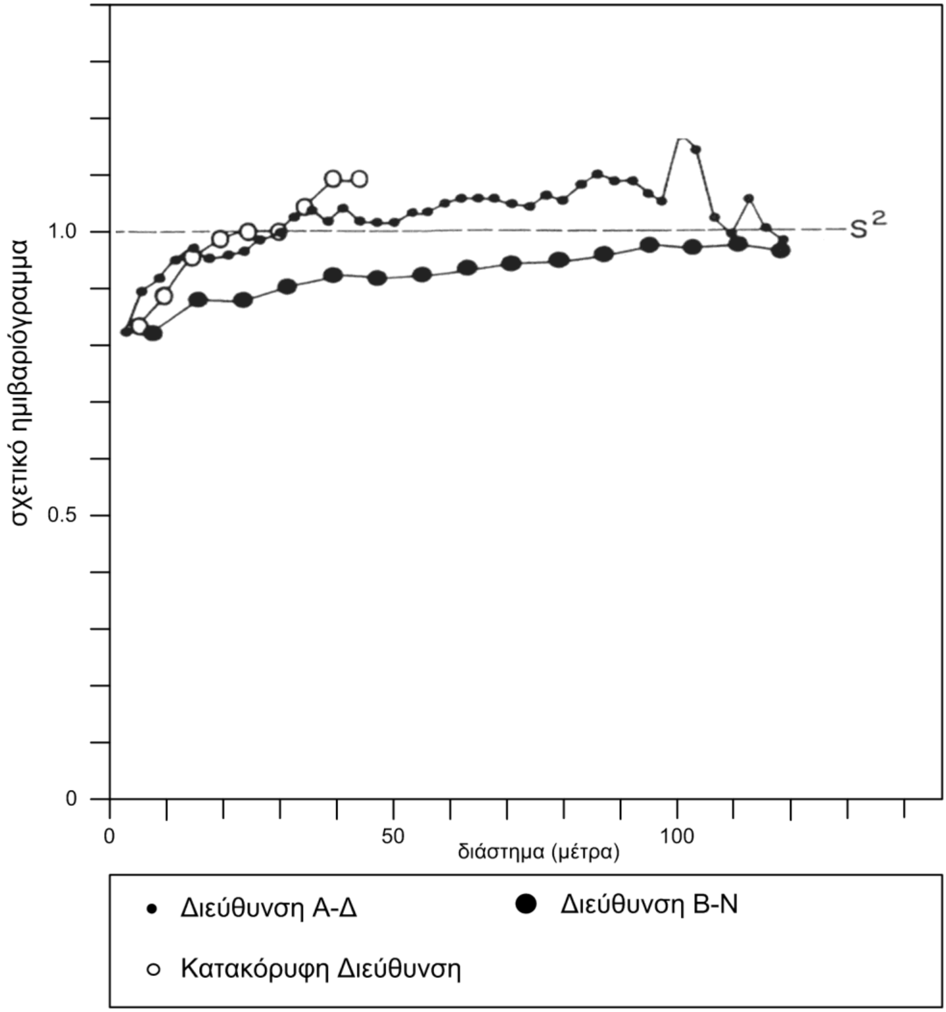
Βαριογράμματα Λογαριθμικού Μετασχηματισμού

Ο σκοπός αυτής της βαριογραφίας ήταν να χαρακτηρίσει τη χωρική κατανομή της μεταλλοφορίας, ειδικά το σχήμα και τις διαστάσεις των σωμάτων υψηλής περιεκτικότητας σε μετάλλευμα. Με αυτή τη σκέψη επομένως, είναι τα εύρη, και πιο ειδικά οι ανισοτροπίες που μας ενδιαφέρουν από τη βαριογραφία. Δεδομένης της λοξής φύσης του ιστογράμματος ΓΠ, αποφασίστηκε ότι αυτά θα εκτιμηθούν καλύτερα με χρήση μετασχηματισμών των δεδομένων.

Ακραίες Τιμές & Βαριογραφία

Ιδιαίτερα λοξά ιστογράμματα που περιέχουν ακραίες τιμές παρατηρήσεων είναι συνήθως μια πρώτη προειδοποίηση για φτωχή βαριογραφία των πραγματικών περιεκτικοτήτων. Οι ακραίες τιμές είναι τα πιο πλούσια δείγματα, και στην περίπτωση των κοιτασμάτων χρυσού μπορούν να κάνουν ένα κοίτασμα κερδοφόρο. Ο αποκλεισμός αυτών των ακραίων τιμών για να βελτιωθεί η βαριογραφία είναι πράγματι πολύ επικίνδυνος!

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της περιγραφής της χωρικής συνέχειας ιδιαίτερα λοξών κατανομών που περιέχουν ακραίες τιμές, μια εναλλακτική λύση εκτός από τη χρήση σχετικών βαριογραμμάτων είναι η χρήση κάποιου μετασχηματισμού των αρχικών τιμών. Για παράδειγμα, αντί να υπολογίσουμε απλά βαριογράμματα των αρχικών τιμών, μπορούμε να υπολογίσουμε βαριογράμματα των λογαρίθμων τους.



Σχήμα 4.21: Σχετικό βαριόγραμμα.

Οι Επιπλοκές του Μετασχηματισμού

Θα πρέπει να επαναλάβουμε ότι ένας λογαριθμικός μετασχηματισμός δεν υπονοεί οποιαδήποτε παραδοχή για την υποκείμενη λογαριθμικότητα της κατανομής. Σε κάθε περίπτωση, μόνο μερικά κοιτάσματα έχουν πραγματικά λογαριθμικές κατανομές. Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός είναι απλά ένας βολικός τρόπος να μειώσουμε τη λοξότητα και τον αρνητικό αντίκτυπο των πολύ υψηλών τιμών στη βαριογραφία.

Μια άλλη κοινή προσέγγιση είναι ο μετασχηματισμός της κατανομής σε κανονική, δηλαδή ο μετασχηματισμός Gauss. Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός χρησιμοποιείται εδώ για λόγους απλότητας και όχι για κάποιο θεωρητικό λόγο. Μάλιστα, τα δεδομένα ΓΠ είναι πιο λοξά από λογαριθμικά, και ο μετασχηματισμός Gauss θα λειτουργούσε καλύτερα.

Μειώνοντας τη λοξότητα της κατανομής χρησιμοποιώντας ένα τέτοιο μετασχηματισμό, μπορούμε να πάρουμε μια πιο εύκολη στην ερμηνεία βαριογραφία. Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός αφαίρεσης της λοξότητας που χρησιμοποιείται είναι μια παραλλαγή του απλού λογαριθμικού μετασχηματισμού:

$$Z'(x) = \log\{a + z(x)\} \qquad \textbf{Εξίσωση 4-18}$$

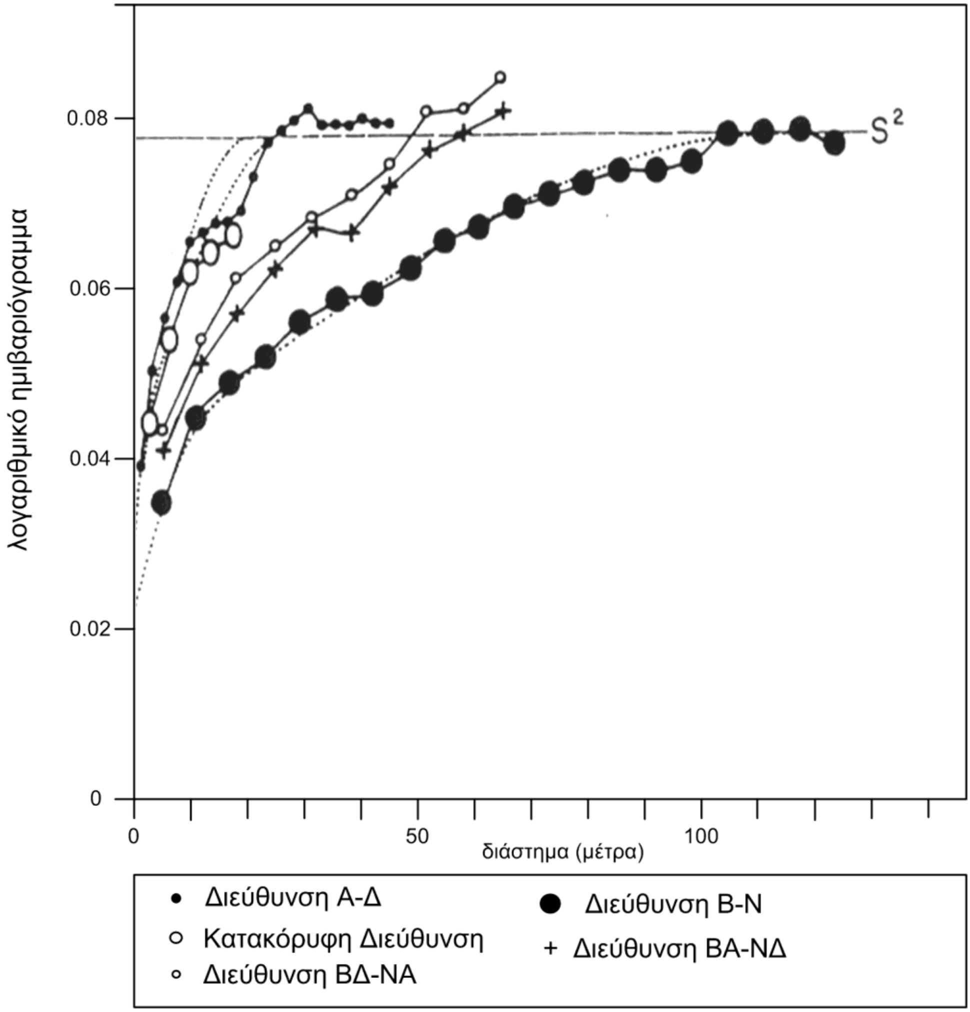
Αυτή η μορφή λογαριθμικού μετασχηματισμού προσπαθεί να αποφύγει την ενίσχυση μικρών διαφορών μεταξύ μικρών τιμών προσθέτοντας μια σταθερά μετατόπισης *α* σε κάθε παρατήρηση πριν πάρουμε του λογάριθμους. Η τιμή του *α* είναι αντίστοιχη στην προσθετική σταθερά για τη λογαριθμική κατανομή τριών παραμέτρων. Θα πρέπει να καθοριστεί λαμβάνοντας υπόψη την τάξη μεγέθους των ίδιων των τιμών (Rivoirard, 1987α). Στην περίπτωση αυτή προστέθηκε μια τιμή 1.0, η οποία πέφτει μεταξύ του μέσου και του διάμεσου των δεδομένων ΓΠ. Το βαριόγραμμα $\gamma(h)_L$ του μετασχηματισμένου σετ δεδομένων μπορεί πλέον να υπολογιστεί εύκολα. Τα αντίστοιχα πειραματικά λογαριθμικά βαριογράμματα δίνονται στο Σχήμα 4.22.

Προσαρμοσμένο Μοντέλο

Προσαρμόστηκε ένα ένθετο σφαιρικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό έχει τη μορφή:

$$\gamma(h) = Co + C_1\, Sph_1(a_1) + C_2\, Sph_2(a_2) \qquad \textbf{Εξίσωση 4-19}$$

όπου *Sph* συμβολίζει το σφαιρικό βαριόγραμμα και *Co, C* και *α* είναι το φαινόμενο ψήγματος, η οριακή τιμή και το εύρος αντίστοιχα. Οι παράμετροι του μοντέλου δίνονται στο σχήμα 4.22.



Μοντέλο για το Λογαριθμικό Ημιβαριόγραμμα			
	Φαινόμενο ψήγματος	Sph_1	Sph_2
Οριακή τιμή	0.026	0.017	0.034
Εύρος	0	20	150
Χ-ανισ.	1.00	1.50	5.00
Υ-ανισ.	1.00	1.00	1.00
Ζ-ανισ.	1.00	1.50	4.00

Σχήμα 4.22: Βαριόγραμμα λογαριθμικού μετασχηματισμού.

Βαριογράμματα Λογαρίθμων και Σχετικά Βαριογράμματα

Το λογαριθμικό βαριόγραμμα των δεδομένων ΓΠ είναι σίγουρα πιο ξεκάθαρα δομημένο από το σχετικό βαριόγραμμα. Ο David (1988) σημειώνει ότι:

'ένα λογαριθμικό (ημι-) βαριόγραμμα $\gamma(h)_L$ συνήθως φαίνεται καλύτερο από ένα σχετικό (ημι) βαριόγραμμα $\gamma(h)_{PR}$ υπολογισμένο στα ίδια δεδομένα, οπότε είναι ευκολότερο να προσαρμοστεί ένα μοντέλο στο λογαριθμικό (ημι-) βαριόγραμμα'.

Σημειώστε ότι υπάρχει σχέση για τη μετατροπή του μοντέλου που παίρνουμε από το λογαριθμικό βαριόγραμμα με αυτό του σχετικού βαριογράμματος, και ότι τα δυο αυτά είναι αντίστοιχα στην περίπτωση λογαριθμικότητας (David, 1988).

Το εύρος ενός βαριογράμματος ή ενός σχετικού βαριογράμματος θα πρέπει να είναι το ίδιο για ένα λογαριθμικό βαριόγραμμα στα ίδια δεδομένα. Αυτό γιατί εάν δυο τιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, το ίδιο είναι και οι λογάριθμοι τους. Η καλύτερα καθορισμένη, συνεχής δομή που αποκαλύπτεται στο λογαριθμικό βαριόγραμμα είναι ένα αποτέλεσμα της μείωσης της επιρροής των ακραίων τιμών λόγω του μετασχηματισμού. Αυτή η υποκείμενη δόμηση είναι ουσιαστικά κρυμμένη στο 'αφελές' βαριόγραμμα, και δεν αποκαλύπτεται καλά ακόμα και στο σχετικό βαριόγραμμα.

Σχετικό Φαινόμενο Ψήγματος και Μη-Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Το εμφανιζόμενο σχετικό φαινόμενο ψήγματος (ε) είναι πολύ χαμηλότερο στο λογαριθμικό βαριόγραμμα. **Προειδοποίηση:** αντίθετα με το εύρος, η αναλογία *Co/C* αλλάζει όταν χρησιμοποιείται ένας μη-γραμμικός μετασχηματισμός (όπως οι λογάριθμοι)! Μπορεί να δειχθεί από τη θεωρία ότι αυτή η αναλογία είναι πάντα μεγαλύτερη στο σχετικό βαριόγραμμα από ότι στο λογαριθμικό.

Το μεγαλύτερο σχετικό φαινόμενο ψήγματος στο βαριόγραμμα και το σχετικό βαριόγραμμα συγκρινόμενο με το λογαριθμικό βαριόγραμμα εξηγείται από την πιο έντονη μικρής κλίμακας διακύμανση στην περιεκτικότητα όταν εξετάζονται πραγματικές περιεκτικότητες αντί των λογαριθμικών μετασχηματισμών (David, 1988). Εδώ η χρήση μιας προσθετικής σταθεράς στον λογαριθμικό μετασχηματισμό βελτιώνει το αποτέλεσμα, μειώνοντας ακόμα περισσότερο το *ε*.

Εύρη

Το προσαρμοσμένο μοντέλο έχει εύρος ΒΝ στα 150m, παρόλο που το πειραματικό βαριόγραμμα σε αυτή τη διεύθυνση σταθεροποιείται περίπου στα 110m πριν από μια ελαφριά άνοδο σε μεγαλύτερο επίπεδο περίπου στα 140m. Φαίνεται λογικό να πούμε ότι η δομή μεγάλης κλίμακας στη διεύθυνση ΒΝ έχει εύρος μεταξύ 110-150m. Η σημαντική μικρής κλίμακας δομή ΒΝ που παρατηρήθηκε νωρίτερα στο σχετικό βαριόγραμμα είναι επίσης εμφανής εδώ, με εύρος στα 20m.

Ανισοτροπία

Υπάρχει έντονη ανισοτροπία, με το λογαριθμικό βαριόγραμμα ΑΔ να παρουσιάζει πολύ μικρότερα εύρη από αυτά στη διεύθυνση ΒΝ. Όμως, το πειραματικό λογαριθμικό βαριόγραμμα στη διεύθυνση ΑΔ έχει μια διακυμενόμενη μορφή: ξεκινά να σταθεροποιείται στα 15m περίπου, μόνο για να ανέβει απότομα πάλι για να σταθεροποιηθεί στην οριακή τιμή.

Μια πιο ομαλή συμπεριφορά αυτού του τύπου φαίνεται στη διεύθυνση ΒΑΝΔ (περίπου στα 50-60m). Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι η μεταλλοφορία είναι πιο έντονα ετερογενής σε αυτές τις διευθύνσεις – με άλλα λόγια, αντιμετωπίζουμε μη-στάσιμη συμπεριφορά. Η μεγάλης κλίμακας δομή στη διεύθυνση ΑΔ εκτιμάται να είναι περίπου στα 30m ενώ η μικρής κλίμακας έχει εύρος 13-15m.

Το πειραματικό λογαριθμικό βαριόγραμμα στην κάθετη διεύθυνση είναι ατελές: δεν υπάρχουν αρκετά διαστήματα στη διεύθυνση αυτή για να οριστεί σωστά. Δεν υπάρχει τρόπος να παρακάμψουμε το πρόβλημα αυτό – είναι ένας περιορισμός των διαθέσιμων δεδομένων. Το μοντέλο που προσαρμόζεται τελικά υποθέτει μια ένθετη σφαιρική δομή με μια μικρής κλίμακας δομή περίπου στα 13-15m (την ίδια όπως και στη διεύθυνση ΑΔ) και μια μεγαλύτερης κλίμακας στα 40m περίπου (ελαφρώς πιο μακριά από τη διεύθυνση ΑΔ).

Εξαιτίας της διαθεσιμότητας μόνο 10 διαστημάτων (δέκα βαθμίδων, μια απόσταση 50m) για το πειραματικό βαριόγραμμα στην κάθετη διεύθυνση, ο καθορισμός της μεγάλης κλίμακας είναι αβέβαιος.

Τα πειραματικά λογαριθμικά βαριογράμματα για τις διευθύνσεις ΒΑΝΔ & ΒΔΝΑ έχουν ενδιάμεσα εύρη. Αυτό είναι σε συμφωνία με τον μεγάλο άξονα της ανισοτροπικής έλλειψης (στο οριζόντιο επίπεδο) που προσανατολίζεται ΒΝ και τον μικρότερο άξονα ΑΔ.

Τα εύρη του λογαριθμικού βαριογράμματος είναι επομένως σε συμφωνία με έναν συνολικό, ή μεγάλης κλίμακας, έλεγχο της μεταλλοφορίας σε μια κλίμακα 100-150m ΒΝ και 30m ΑΔ, δηλαδή είναι εμφανής η έντονη ανισοτροπία. Κάθε μεγάλης κλίμακας έλεγχος στη γεωμετρία της μεταλλοφορίας στην κάθετη διεύθυνση δεν μπορεί να καθοριστεί από τα διαθέσιμα δεδομένα. Οι δομές μικρής κλίμακας έχουν εύρος περίπου 15-20m ΒΝ, ΑΔ και κάθετα, δηλαδή η δόμηση μικρής κλίμακας είναι ουσιαστικά ισοτροπική.

Είναι Πάλι Πιθανή η Μη-Στασιμότητα;

Αξίζει να σημειωθεί ότι το λογαριθμικό βαριόγραμμα στην κάθετη διεύθυνση δεν αυξάνει πάνω από το επίπεδο της συνολικής διακύμανσης κατά τον τρόπο που έκανε το συμβατικό βαριόγραμμα και το σχετικό βαριόγραμμα. Ο μετασχηματισμός εξομάλυνσης που γίνεται παίρνοντας τους λογάριθμους εξαφάνισε αυτό το κατασκεύασμα, συνιστώντας ότι είχε προκληθεί, εν μέρει, από ένα μικρό αριθμό ζευγών που περιέχουν ακραίες τιμές στη κάθετη διεύθυνση, δίνοντας πολύ μεγαλύτερες μέσες τετραγωνισμένες διαφορές στα δοσμένα διαστήματα από ότι στις άλλες διευθύνσεις.

Σε μεγαλύτερα διαστήματα, υπάρχουν πάντα λιγότερα ζεύγη, και η επίπτωση μιας μοναδικής υψηλής τιμής θα είναι πιο έντονη καθώς πέφτει ο αριθμός των ζευγών. Η συμπεριφορά του πειραματικού βαριογράμματος στην κάθετη διεύθυνση υπονοεί ότι ακραίες τιμές θα εμφανιστούν κοντά στην κορυφή ή το πάτωμα της ζώνης ενδιαφέροντος.

Πράγματι, τα δυο πιο πλούσια δείγματα (115 και 99 g/t) εμφανίζονται στις κατώτερες δυο βαθμίδες της ζώνης ενδιαφέροντος. Η τάση για αυξανόμενη περιεκτικότητα στις χαμηλότερες βαθμίδες της ζώνης ενδιαφέροντος είναι πραγματική, αλλά μάλλον υπερβάλεται από μερικές πολύ υψηλές τιμές.

Βαριογράμματα Μετασχηματισμού Δείκτη

Για ένα μετασχηματισμό δείκτη, σε κάθε δείγμα δίνεται μια τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το εάν είναι μεγαλύτερη ή όχι από ένα ορισμένο όριο εκμεταλλευσιμότητας z_c.

Γιατί Χρησιμοποιούνται οι Δείκτες;

Η χρήση δεικτών αποτελεί μια διαφορετική στρατηγική για την εκτέλεση δομικής ανάλυσης με σκοπό τον χαρακτηρισμό της χωρικής κατανομής των περιεκτικοτήτων. Στην περίπτωση αυτή, η μετασχηματισμένη κατανομή είναι δυαδική, και έτσι – εξ ορισμού – δεν περιέχει ακραίες τιμές. Επιπλέον, το βαριόγραμμα δείκτη για ένα συγκεκριμένο όριο εκμεταλλευσιμότητας θα πρέπει να ερμηνεύεται φυσικά ώστε να χαρακτηρίζει τη χωρική συνέχεια των δειγμάτων ως προς το όριο αυτό.

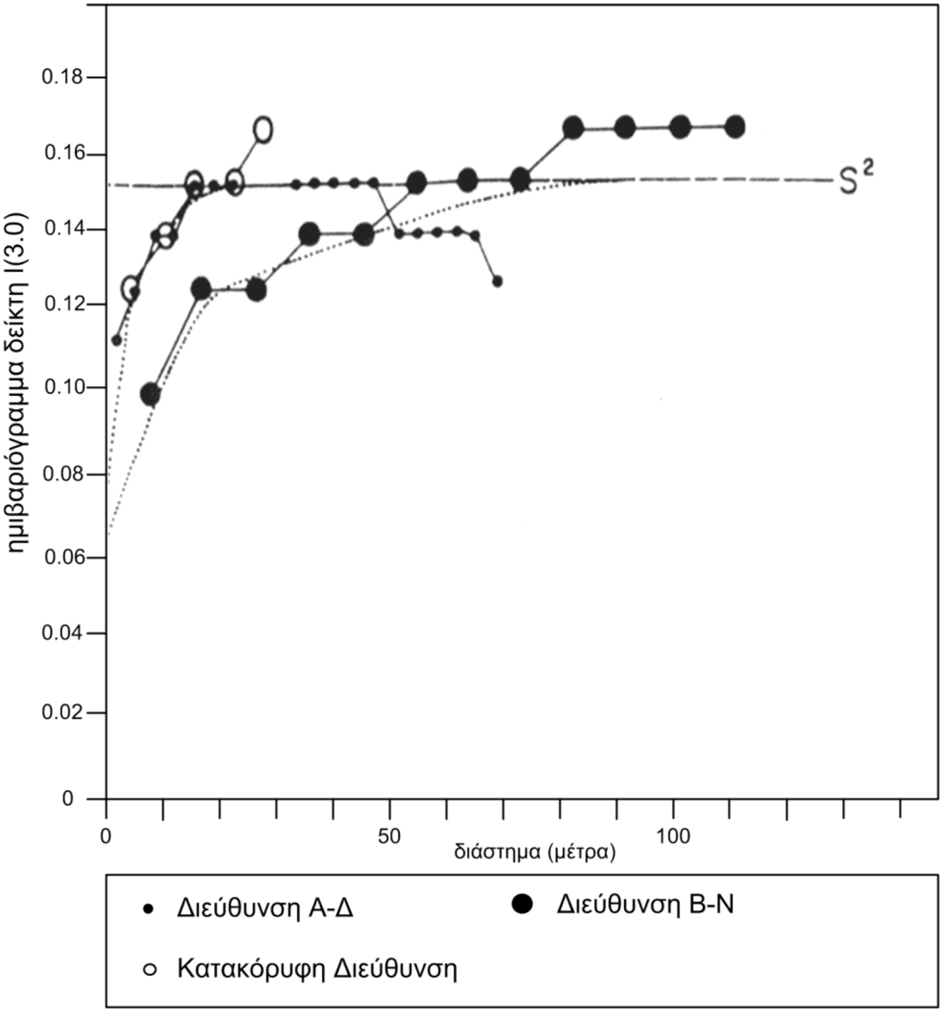
Επιλογή του Ορίου Εκμεταλλευσιμότητας

Τα βαριογράμματα δείκτη υπολογίστηκαν για τον δείκτη $I(z_c = 3.0)$. Αυτό το όριο επιλέχτηκε μετά την κατασκευή και εξέταση ισοκαμπύλων κλίμακας 1:500 βαθμίδα προς βαθμίδα των αρχικών δεδομένων ΓΠ για τη συνολική ζώνη ενδιαφέροντος. Τα δεδομένα αυτά για αυτά τα πλάνα δημιουργούνται με υπολογιστή και στη συνέχεια ενώνονται σε ισοκαμπύλες με το μάτι για διάφορα όρια εκμεταλλευσιμότητας. Αυτό συνιστά συνέχεια των μεταλλοφόρων σωμάτων σε όρια έως περίπου 5g/t, αλλά ασυνέχεια πάνω από αυτό. Το όριο 3g/t έδειξε την πιο συνεχή περιγράμμιση των υψηλότερων περιεκτικοτήτων. Τα χαμηλότερα όρια μπορούσαν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να επεκτείνουν την ανάλυση. Στην περίπτωση αυτή, θα παρουσιάσουμε μόνο ένα μοναδικό όριο.

Το Σχήμα 4.23 δείχνει το βαριόγραμμα $I(z_c = 3.0)$ για τις βασικές διευθύνσεις του μοντέλου μπλοκ, δηλαδή τις ΑΔ, ΒΝ και την κατακόρυφη διεύθυνση. Το πειραματικό βαριόγραμμα δείκτη για τις ενδιάμεσες διευθύνσεις δεν δίνεται, και πάλι για λόγους ευκρίνειας – πέφτουν ανάμεσα στο βαριόγραμμα ΒΝ και τα βαριογράμματα ΑΔ και κατακόρυφο, όπως και στην περίπτωση του λογαριθμικού βαριογράμματος.

Για άλλη μια φορά προσαρμόζεται ένα ανισοτροπικό, ένθετο σφαιρικό μοντέλο με φαινόμενο ψήγματος. Σημειώστε τα εξής:

- Το σχετικό φαινόμενο ψήγματος είναι, και πάλι, χαμηλότερο από ότι στο βαριόγραμμα και στο σχετικό βαριόγραμμα.
- Το μεγάλο εύρος στη διεύθυνση ΒΝ είναι περίπου 80m και το μικρό εύρος είναι 20m.
- Το μοντέλο που προσαρμόζεται στις διευθύνσεις ΑΔ και στην κάθετη είναι ίδιο για το βαριόγραμμα $I(z_c = 3.0)$. Και οι δυο διευθύνσεις παρουσιάζουν δομή μικρής κλίμακας με ένα εύρος περίπου 6-7m και ένα μεγάλο εύρος 20m.



Μοντέλο για το ημιβαριόγραμμα δείκτη I(3.0)			
	Φαινόμενο Ψήγματος	Sph1	Sph2
Οριακή Τιμή	0.06	0.04	0.03
Εύρος	0	20	80
Χ-ανισ.	1.00	3.00	4.00
Υ-ανισ.	1.00	1.00	1.00
Ζ-ανισ.	1.00	3.00	4.00

Σχήμα 4.23: Βαριόγραμμα δείκτη για όριο εκμεταλλευσιμότητας 3.0g/t.

Δομές Μικρού Εύρους

Οι δομές μικρού εύρους στη ΒΝ, ΑΔ και κάθετη διεύθυνση συνιστούν έντονα την παρουσία συνεχών μεταλλοφόρων σωμάτων +3g/t, χωρίς κάποιο συγκεκριμένο προσανατολισμό, με μέσες διαστάσεις περίπου στα 15-20m. Η μεγάλου εύρους δομή στη διεύθυνση ΒΝ μάλλον αντικατοπτρίζει τη συνολική γεωμετρία της μεταλλοφόρου ζώνης. Συνολικά, η βαριογραφία δείκτη για $I(z_c = 3.0)$ επιβεβαιώνει την εικόνα που παίρνουμε από το παραπάνω λογαριθμικό βαριόγραμμα.

Περίληψη Βαριογραφίας

Ο σκοπός της βαριογραφίας ήταν μια προσπάθεια να χαρακτηριστεί η κύρια μεταλλοφορία, ειδικά σε σχέση με την κατανομή του υλικού υψηλής περιεκτικότητας.

Βαριογράμματα

Το βαριόγραμμα των αρχικών ή μη-μετασχηματισμένων δεδομένων ΓΠ είναι φτωχά δομημένο. Από την άποψη του χαρακτηρισμού του σχήματος των σωμάτων υψηλής περιεκτικότητας της μεταλλοφορίας, δεν είναι πολύ χρήσιμο. Παρατηρείται ένα μεγάλο σχετικό φαινόμενο ψήγματος (ε). Η επιρροή ενός μικρού μέρους δεδομένων ακραίων τιμών στο βαριόγραμμα εντάθηκε.

Σχετικά Βαριογράμματα

Το σχετικό βαριόγραμμα ζευγών δίνει μια πιο ξεκάθαρη εικόνα της κατανομής της περιεκτικότητας στη ζώνη ενδιαφέροντος. Αυτό αναμφίβολα οφείλεται στην παρουσία ενός διακριτού αναλογικού φαινομένου. Σε τέτοιες περιπτώσεις τα σχετικά βαριογράμματα είναι πιο αντικειμενικά και συνήθως αποδίδουν καλύτερα από τα απλά βαριογράμματα. Παρατηρήθηκε μια διακριτή ανισοτροπία στο σχετικό βαριόγραμμα

Λογαριθμικά Βαριογράμματα

Η βαριογραφία των λογαριθμικών μετασχηματισμών έδωσε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα της δομής της περιεκτικότητας. Εκτός από το να αποκαλύψει ξεκάθαρα την ανισοτροπία, ο λογαριθμικός μετασχηματισμός επέτρεψε την προσαρμογή ενός ένθετου σφαιρικού μοντέλου. Θα πρέπει να περιμένουμε μια παρόμοια εικόνα για μια δομική ανάλυση στηριζόμενη σε έναν κανονικό μετασχηματισμό Gauss.

Βαριογράμματα Δείκτη

Ο μετασχηματισμός δείκτη I(3.0) επιλέχθηκε σε βάση χαρτών της περιεκτικότητας. Στο όριο 3.0g/t υπάρχει μια καθαρή δομή στο βαριόγραμμα δείκτη. Αυτό ερμηνεύεται φυσικά να αποδίδει περιληπτικά τη χωρική συνέχεια της μεταλλοφορίας πάνω από αυτήν την περιεκτικότητα.

Χαρακτηρισμός της Χωρικής Κατανομής της Περιεκτικότητας

Έτσι η βαριογραφία μας έδωσε την παρακάτω εικόνα της χωρικής κατανομής (ή του χαρακτήρα) της περιεκτικότητας σε χρυσό:

- **Δομές μεγάλου εύρους,** που αντιστοιχούν στο συνολικό έλεγχο της μεταλλοφορίας, έχουν εύρος 100-150m ΒΝ και 30m ΑΔ, δηλαδή έντονη ανισοτροπία.
- **Δομές μικρού εύρους,** που αντιστοιχούν σε σώματα μεγάλης περιεκτικότητας, έχουν εύρος 15-20m ΒΝ και ΑΔ. Η βαριογραφία δείκτη υποστηρίζει αυτήν την ερμηνεία ισοτροπίας σωμάτων +3g/t.
- **Κάθετα εύρη** τουλάχιστον 15m. Μόνο 50m κάθετων δεδομένων ΓΠ ήταν διαθέσιμα – πέρα από το ένα τρίτο αυτής της απόστασης (17m) η ερμηνεία του βαριογράμματος έγινε δύσκολη.

Γεωλογικοί Παράγοντες

Η γεωλογική ερμηνεία είναι ζωτικής σημασίας και παράλληλη στη βαριογραφική και δομική ανάλυση. Το συνολικό μοντέλο θα πρέπει να λαμβάνεται ως αποτέλεσμα της εκτέλεσης και σύγκρισης και των τριών αναλύσεων.

Ως συμπλήρωμα στην ανάλυση βαριογραφίας και ερευνητικών δεδομένων που γίνεται σε αυτή τη μελέτη, έγινε μια πλήρης και ολοκληρωμένη γεωλογική ερμηνεία σε όλα τα επίπεδα της ζώνης ενδιαφέροντος. Έγινε μια προσπάθεια να ενωθούν τα δεδομένα ελέγχου περιεκτικότητας με τις πληροφορίες των γεωτρήσεων και τη χαρτογράφηση βαθμίδων εντός του ορυχείου. Η ερμηνεία που δόθηκε στηρίχθηκε σε όλα τα διαθέσιμα δεδομένα για τη ζώνη ενδιαφέροντος.

Αυτή η ερμηνεία έγινε δυνατή σε μεγάλο βαθμό λόγω της δημιουργίας από τον υπολογιστή έγχρωμων διαγραμμάτων και τομών. Η χαρτογράφηση των πληροφοριών από τη διερεύνηση του κοιτάσματος αποκάλυψε μόνο ένα μέρος της εικόνας της μεταλλοφορίας: τα δεδομένα ΓΠ ήταν ουσιαστικά στο να μας επιτραπεί ο λεπτομερής χαρακτηρισμός των σωμάτων υψηλής περιεκτικότητας.

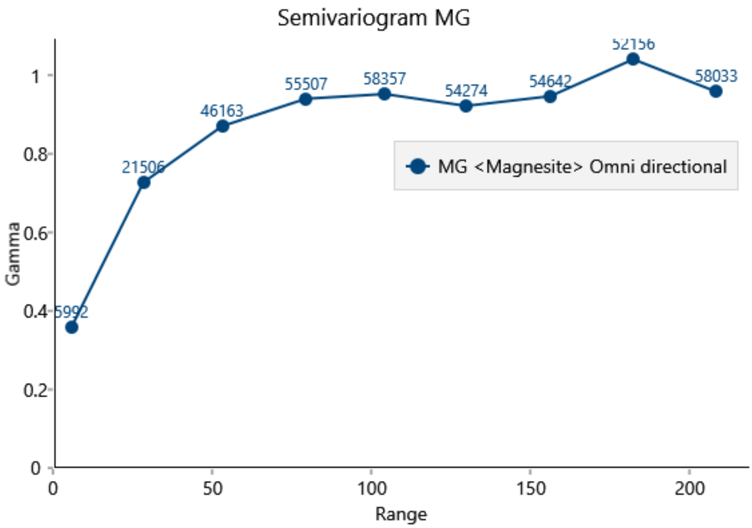
Σύγκριση Γεωλογίας και Βαριογραφίας

Το βήμα αυτό είναι υποχρεωτικό! Στην περίπτωση μας, η γεωλογική ερμηνεία συμφωνεί αρκετά με τη βαριογραφία, δείχνοντας μεγάλες δομές ΒΔ τάσης στα 100-150m (ΒΝ) και ΒΑ-τάσης δομές στα 30m (ΑΔ), δίνοντας μια φυσική εξήγηση για την παρατηρούμενη βαριογραφία. Τα σώματα υψηλής περιεκτικότητας είναι περίπου 20 x 20m στο επίπεδο και δεν δείχνουν ξεκάθαρη συνολική ανισοτροπία, παρόλο που μερικά σώματα μπορεί να είναι μακρύτερα κατά ΒΝ και ΑΔ.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Ποια είναι τα βασικά βήματα στην εξέταση ενός βαριογράμματος;
2. Σε ποια διεύθυνση υπολογίζουμε το πειραματικό βαριόγραμμα γεωτρητικών δεδομένων για να προσεγγίσουμε καλύτερα την τιμή του φαινόμενου ψήγματος;

3. Για ποιο λόγο προσαρμόζουμε μοντέλο στο πειραματικό βαριόγραμμα; Ποια μοντέλα βαριογράμματος γνωρίζετε;
4. Ποια είναι η εξίσωση του πειραματικού βαριογράμματος; Το πειραματικό βαριόγραμμα δίνει τιμή βαριογράμματος για κάθε απόσταση ή όχι; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.
5. Αρκεί ο υπολογισμός του πειραματικού βαριογράμματος για την εφαρμογή του kriging και την εκτίμηση μιας παραμέτρου στο χώρο;
6. Τι αντιπροσωπεύει το φαινόμενο ψήγματος;
7. Ποιον τύπο μοντέλου βαριογράμματος θα προσαρμόζατε στο παρακάτω πειραματικό βαριόγραμμα και με τι χαρακτηριστικά (φαινόμενο ψήγματος, εύρος, οριακή τιμή);



8. Υπολογείστε την τιμή του πειραματικού βαριογράμματος στις διευθύνσεις 0°, 45°, 90°, και 135° σε αποστάσεις ενός, δύο, και τριών κελιών των τιμών του παρακάτω χάρτη:

68	66	71	74	65	60	71
76	75	73	72	69	68	79
80	73	67	69	72	75	74
83	72	63	66	77	86	74
86	73	63	63	75	85	72
89	75	62	56	68	77	66

5. ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ‘ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ’

Στήριξη

Συχνά μια χωρομεταβλητή (ΧΜ) ορίζεται σε μια επιφάνεια ή έναν όγκο αντί για ένα σημείο. Ενώ θα ήταν λογικό να εξετάσουμε ένα υψόμετρο σε ένα ορισμένο σημείο, συνήθως εξετάζουμε περιεκτικότητες σε σχέση με έναν όγκο. Ο βασικός όγκος στον οποίο ορίζεται ή μετριέται μια χωρομεταβλητή ονομάζεται *στήριξη* της χωρομεταβλητής.

Εάν εξετάσουμε τα ίδια φαινόμενα (ας πούμε τις περιεκτικότητες του χρυσού) με διαφορετική στήριξη (ας πούμε 1m πυρήνες έναντι 2m) τότε εξετάζουμε δυο διαφορετικές ΧΜ. Αυτές οι δυο ΧΜ έχουν διαφορετική στήριξη και αυτό υπονοεί διαφορετικό δομικό (ή βαριογραφικό) χαρακτήρα. Οι περιεκτικότητες που υπολογίζονται σε δείγματα ψηγμάτων RC, πυρήνες HQ, δείγματα υπόγειων καναλιών, και τα μεταλλευτικά μπλοκ θα είναι διακριτά διαφορετικές σε χαρακτήρα.

Έτσι, δημιουργείται το σημαντικό ερώτημα: ‘πως μπορούμε να συσχετίσουμε ΧΜ που ορίζονται σε διαφορετικές στηρίξεις;’ Ένας άλλος τρόπος να το αποδώσουμε είναι: ‘γνωρίζοντας τις περιεκτικότητες των πυρήνων, τι μπορούμε να πούμε για τις περιεκτικότητες σε αυτά τα μπλοκ;’

Θα εξετάσουμε την απάντηση σε αυτήν τη σημαντική ερώτηση σε δυο στάδια. Πρώτα, εξετάζουμε τη διασπορά ως συνάρτηση της στήριξης.

Η Διασπορά ως Συνάρτηση της Στήριξης

Οι περιεκτικότητες μετρημένες σε μια μικρή στήριξη, ας πούμε πυρήνες όγκου v, μπορεί να είναι πολύ υψηλότερες ή φτωχότερες από τις περιεκτικότητες της ίδιας μεταλλοφορίας που μετρήθηκε σε μεγαλύτερες στηρίξεις, ας πούμε μεταλλευτικά μπλοκ V=5x5x5m. Στατιστικά, λέμε ότι περιεκτικότητες σε στήριξη δείγματος είναι πιο διεσπαρμένες από τις περιεκτικότητες σε στήριξη μπλοκ.

Φαινόμενο Στήριξης

Γενικά, περιεκτικότητες σε μικρότερη στήριξη είναι πιο διεσπαρμένες από περιεκτικότητες σε μεγαλύτερη στήριξη. Παρόλο που η συνολική μέση περιεκτικότητα διαφορετικών στηρίξεων με μηδενικό όριο εκμεταλλευσιμότητας θα πρέπει να είναι η ίδια, η διακύμανση των μικρότερων στηρίξεων θα είναι υψηλότερη. Το ‘φαινόμενο στήριξης’ είναι αυτή η επιρροή της στήριξης στην κατανομή των περιεκτικοτήτων.

Παράδειγμα

Θα εξετάσουμε την ιδέα της διασποράς μέσω ενός παραδείγματος αρχικά δοσμένου από τον Delfiner (1979). Τα δεδομένα είναι μετρήσεις πορώδους σε μια λεπτή τομή, αλλά μπορεί να θεωρηθούν περιεκτικότητες ή οποιαδήποτε άλλη αθροιστική μεταβλητή: οι αρχές είναι οι ίδιες. Μπορεί να φαίνεται περίεργο να δουλέψουμε σε τέτοια μικρή κλίμακα, αλλά αυτό μας επιτρέπει να έχουμε πλήρη δεδομένα – κάτι που δεν συμβαίνει συχνά στις περισσότερες γεωστατιστικές εφαρμογές.

Η λεπτή τομή χωρίστηκε σε 324 συνεχής τετραγωνικές περιοχές, η κάθε μια με πλευρές 800 μικρά. Ο Πίνακας 5.1 δίνει τα αρχικά δεδομένα. Οι τιμές του πορώδους υπολογίστηκαν σε ομάδες των τεσσάρων (μπλοκ 2 x 2), ομάδες των 9 (μπλοκ 3 x 3), και ομάδες των 36 (μπλοκ 6 x 6). Τα αποτελέσματα αυτών δίνονται στους πίνακες 5.2, 5.3, και 5.4.

Πίνακας 5.1: Δεδομένα πορώδους – Αρχικές τιμές

20.18	20.42	24.43	25.67	26.05	21.22	18.17	21.14	27.43	19.46	20.57	8.77	7.53	15.19	24.11	28.58	29.83	23.8
19.37	13.94	21.62	20.02	11.93	6.81	18.46	19.38	23.27	29.3	25.06	22.4	29.84	25.1	21.57	29.11	26.57	17.72
20.92	23.6	18.81	16.29	25.2	20.13	22.33	20.91	24.68	26.3	20.75	22.14	19.2	19.54	20.8	13.94	20.41	19.26
28.45	22.61	24.7	15.96	25.34	21.5	25.61	29.23	23.91	35.63	33.76	21.58	21.27	24.37	23.35	16.43	25.33	20.1
22.82	22.29	16.97	26.87	27.28	19.51	25.37	28.08	15.49	17.23	24.7	29.04	22.93	31.76	18.63	22.29	27.55	29.51
22.32	25.64	21.35	24.68	21.39	21.75	21.59	31.3	33.57	21.99	22.78	25.95	26.1	16.34	37.32	27.03	15.09	18.41
20.96	19.89	24.44	29.59	25.34	31.1	22.48	28.12	23.34	24.15	27.42	18.49	28.17	21.38	21.46	29.95	26.31	33.14
21.93	23.48	22.76	24.47	22.16	30.37	26.43	28.07	28.11	30.8	25.72	28.99	25.85	26.76	18.87	25.18	22.15	26.72
14.02	19.59	21.03	23.6	26.17	22.2	15.83	17.65	29.48	24.75	36.27	24.07	23.55	25.54	32.82	24.33	33.79	25.93
27.89	28.26	25.1	25.75	22.47	24.36	28.27	22.53	22.72	19.53	26.3	22.5	26.21	23.33	16.53	21.56	16.36	22.02
13.6	21.14	17.65	23.84	21.69	23.7	17.89	24.5	18.42	16.51	23.18	30.37	22.86	19.47	24.93	17.45	25.35	25.95
23.68	23.33	15.96	29.98	9.34	26.86	29.14	30.63	26.94	22.04	22.3	25.44	21.48	16.35	13.96	26.38	17.6	23.71
14.96	20.84	20.5	22.79	22.88	20.51	25.65	24.79	24.84	23.54	21.98	23.22	25.66	21.05	21.63	23.72	25.04	23.28
20.75	26.58	21.19	18.45	20.37	23.68	27.81	23.39	21.47	19.91	26.44	19.1	22.02	12.16	15.31	23.14	16.1	23.56
25.98	20.66	19.98	17.78	20.43	24.15	23.35	27.11	29.51	26.72	19.91	26.53	24.48	21.95	23.15	25.51	24.52	21.41
21.3	27.13	25.13	19.37	19.48	24.01	29.95	21.98	21.7	20.58	26.63	18.37	16.28	23.87	21.37	14.45	19.19	20.32
19.36	22.5	22.22	6.63	19.12	18.72	27.77	22.45	26.15	26.2	21.63	27.89	21.44	19.46	19.3	26.82	26.85	20.65
20.45	24.61	22.43	26	23.88	25.6	24.64	25.5	25.92	23.45	21.35	17.73	19.45	15.85	9.75	21.03	17.38	15.44

Σημειώστε ότι παρατηρούμε πολύ υψηλές (>30) και πολύ χαμηλές (<10) τιμές στον πίνακα 5.1 (αρχικά δεδομένα), αλλά αυτές οι ακραίες τιμές λείπουν από τα μπλοκ στους άλλους πίνακες. Προφανώς, οι υψηλότερες και χαμηλότερες τιμές εξομαλύνονται καθώς αυξάνουμε την κλίμακα της εξομάλυνσης. Οι τιμές των μπλοκ 6 x 6 είναι πολύ ομαλές, καθώς βρίσκονται όλες στο εύρος 20-25.

Τα ιστογράμματα των αρχικών δεδομένων και των υπολογισμένων τιμών δίνονται στα Σχήματα 5.1, 5.2 και 5.3. Παρατηρούμε ότι ο μέσος κάθε ιστογράμματος είναι ο ίδιος – αυτό είναι λογικό, καθώς οι υπολογισμοί σε μεγαλύτερα μπλοκ δεν επηρεάζουν τον μέσο. Όμως, οι διασπορές μειώνονται απότομα καθώς μεγαλώνει το μέγεθος των μπλοκ.

Πίνακας 5.2: Τιμές πορώδους για μπλοκ 2 x 2.								
18.63	22.93	16.50	19.29	24.86	19.20	19.41	25.84	24.48
23.89	18.94	23.04	24.53	27.63	24.56	21.09	18.68	21.27
23.27	22.47	22.48	26.58	22.07	25.62	26.79	25.84	22.64
21.56	25.31	27.49	26.27	26.60	25.15	25.54	23.86	27.08
22.44	23.87	23.81	21.07	21.14	27.25	24.65	23.81	24.54
20.54	21.86	20.40	25.54	20.98	25.32	22.54	20.68	23.15
20.78	20.73	21.86	25.41	22.44	22.68	20.22	20.96	21.99
21.27	20.56	22.02	25.60	24.10	22.61	21.64	21.12	21.36
21.73	19.32	21.83	25.09	25.43	22.14	19.05	16.67	20.08

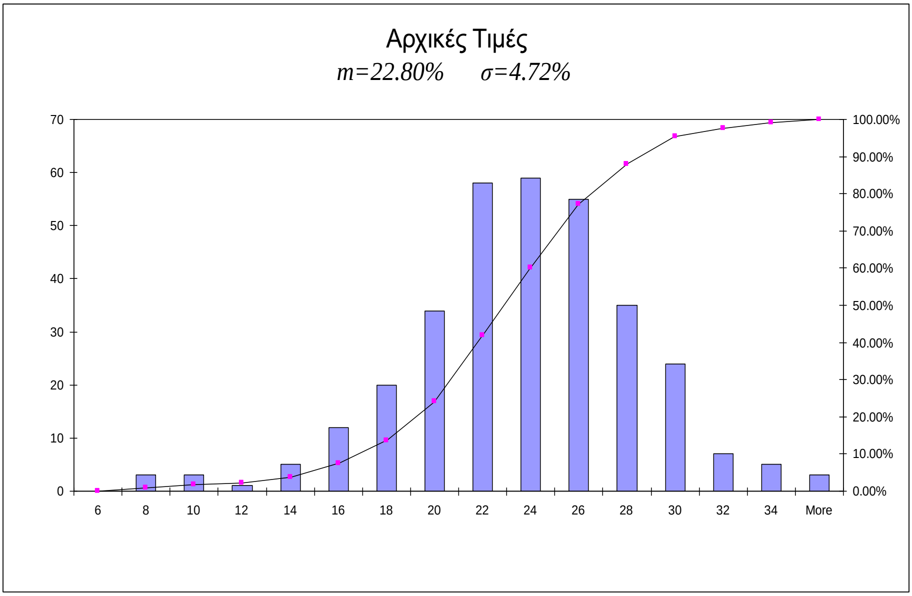
Πίνακας 5.3: Τιμές πορώδους για μπλοκ 3 x 3.					
20.44	19.48	21.75	21.64	20.32	23.25
23.02	22.70	26.02	25.85	25.80	22.41
20.90	26.22	24.39	26.74	24.93	27.50
21.89	23.11	24.56	23.13	21.68	21.82
20.16	21.23	25.31	22.70	20.82	22.92
22.79	20.31	25.12	22.64	18.50	19.13

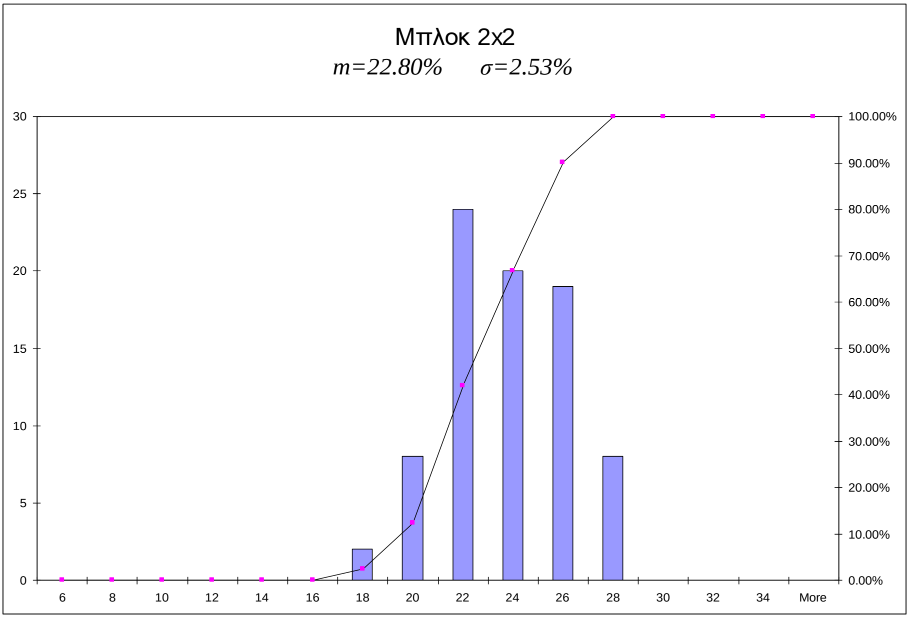
Πίνακας 5.4: Τιμές πορώδους για μπλοκ 6 x 6.		
21.35	23.81	22.95
23.03	24.70	23.98
21.12	23.95	20.34

Όπως είπαμε και στο κεφάλαιο 2, η διασπορά μπορεί να μετρηθεί με διάφορους τρόπους, για παράδειγμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εύρος (τη διαφορά μεταξύ της ελάχιστης και μέγιστης τιμής). Τα εύρη τα σχετικά με διαφορετικές στηρίξεις που εξετάζονται δίνονται παρακάτω:

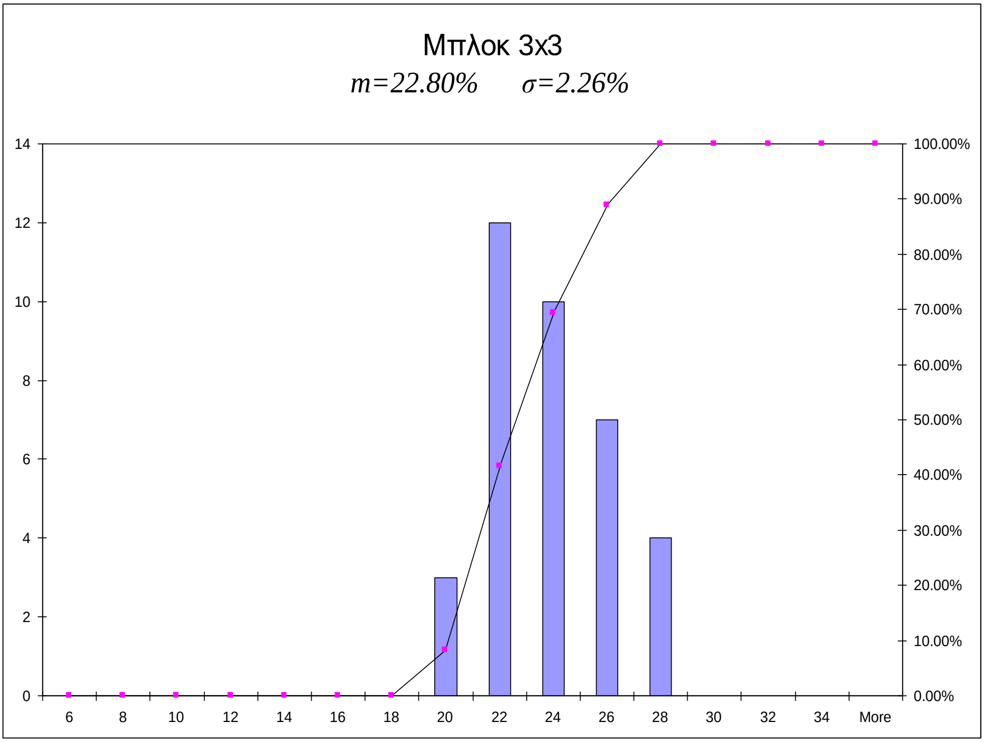
Πίνακας 5.5: Διασπορά του πορώδους μετρημένη ανά εύρος.			
	Ελάχιστη Τιμή	**Μέγιστη Τιμή**	**Εύρος**
Αρχικά Δεδομένα	6.63	37.22	30.59
2 x 2	16.50	27.63	11.13
3 x 3	18.50	27.50	9.00
6 x 6	20.34	24.70	4.36

Η διακύμανση είναι ένα άλλο μέτρο της διασποράς και χρησιμοποιείται πιο συχνά στη στατιστική και γεωστατιστική. Οι αντίστοιχες διακυμάνσεις (σε μονάδες 10^{-4}) δίνονται στον Πίνακα 5.6.





Σχήμα 5.1 & 5.2: Ιστογράμματα του πορώδους: αρχικά δεδομένα (πάνω) και μπλοκ 2 x 2 (κάτω).



Σχήμα 5.3: Ιστόγραμμα πορώδους μπλοκ 3 x 3.

Πίνακας 5.6: Διασπορά πορώδους μετρημένη κατά διακύμανση.	
	Διακύμανση
Αρχικά Δεδομένα	22.31
2 x 2	6.42
3 x 3	5.11
6 x 6	1.99

Πως Μπορεί να Βοηθήσει η Γεωστατιστική

Στο παράδειγμα αυτό τονίσαμε ότι οι τιμές του πορώδους είναι ένα σχετικά πλήρες σετ δεδομένων. Φυσικά, εάν δεν είχαμε και τις 324 κοντινές μετρήσεις του πορώδους, δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις διακυμάνσεις που δίνονται στον παραπάνω πίνακα – ή μήπως θα μπορούσαμε; Η γεωστατιστική μας επιτρέπει να καθορίσουμε θεωρητικά τις διακυμάνσεις σε διαφορετικές στηρίξεις εάν έχουμε ένα επαρκές μοντέλο βαριογράμματος και ανάλογους πίνακες (ή πιο συχνά στις μέρες μας ένα πρόγραμμα υπολογιστή).

Οι Επιπτώσεις στην Εκμετάλλευση

Προφανώς εάν οι τιμές του παραδείγματος ήταν περιεκτικότητες, τότε η εφαρμογή ενός ορίου εκμεταλλευσιμότητας σε μια στήριξη θα δώσει εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του ίδιου ορίου σε άλλη στήριξη. Μάλιστα, το σχήμα 1.3 έδειξε ότι προβλέπουμε περισσότερο μετάλλευμα όταν χρησιμοποιούμε μικρότερες στηρίξεις. Αυτό είναι λογικό: καθώς εξομαλύνουμε τις περιεκτικότητες χρησιμοποιώντας μεγαλύτερες στηρίξεις, υπάρχουν λιγότερες υψηλές περιεκτικότητες.

Η πρακτική επίπτωση αυτού είναι κρίσιμη – εάν επιλέγουμε μπλοκ ως στείρα ή μετάλλευμα σχετικά με κάποιο όριο, αλλά στηριζόμενοι σε γεωτρητικά δείγματα (που φανερά έχουν μικρότερη στήριξη από το εφικτό μπλοκ εξόρυξης) τότε παίρνουμε το ρίσκο να **υπερεκτιμήσουμε σοβαρά το ποσοστό των μπλοκ πάνω από κάποιο όριο.**

Το πρόβλημα αυτό είναι υπαρκτό σε όλους τους κλασικούς εκτιμητές, γιατί δεν λαμβάνουν υπόψη τους τη στήριξη. Αυτός είναι ένας από τους κύριους λόγους για τους οποίους οι πολυγωνικοί εκτιμητές, για παράδειγμα, απαιτούν τον αποκλεισμό των υψηλών περιεκτικοτήτων για να πάρουμε λογικά αποτελέσματα.. Σημειώστε επίσης ότι επειδή η διασπορά – και ειδικά η διακύμανση – είναι φανερά συνδεδεμένη με τη στήριξη, αναμένουμε το βαριόγραμμα να είναι διαφορετικό για διαφορετικές στηρίξεις. Αυτό συμβαίνει, τουλάχιστο, γιατί η οριακή τιμή θα πρέπει να είναι μικρότερη για μεγαλύτερη στήριξη.

Διακυμάνσεις Διασποράς Εντός Όγκου V

Τώρα πλέον έχουμε μια αίσθηση για την επίπτωση της στήριξης στη διακύμανση για ένα απλό παράδειγμα: μεγαλύτερη στήριξη – μικρότερη διακύμανση.

Διακύμανση Σημείου Εντός του V

Για ευκολία, θα αναφερθούμε στις στηρίξεις που εξετάζουμε ως *V* και *v* (μεγάλη και μικρή στήριξη αντίστοιχα). Σύμφωνα με το γεωστατιστικό μοντέλο (των χωρομεταβλητών) η μεταβλητή που εξετάζουμε μπορεί να θεωρηθεί ως μια πραγματοποίηση *z(x)* της τυχαίας μεταβλητής (ΤΜ) *Z(x)*. Εάν είχαμε όλες τις τιμές της *z(x)* για τον χώρο *V*, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον μέσο και τη διακύμανση της μέσα σε αυτόν. Μπορούμε να αποδώσουμε τον μέσο και τη διακύμανση ως χωρικά ολοκληρώματα ως εξής:

$$m_v = \frac{1}{V}\int_V z(x)dx$$

$$D^2(o|V) = \frac{1}{V}\int_V \{z(x) - m_V\}^2 dx \qquad \textbf{Εξίσωση 5-1}$$

όπου $D^2(o\,|V)$ συμβολίζει τη διακύμανση των σημείων ('ο') μέσα στον όγκο *V*. Όταν αναφερόμαστε σε σημείο εννοούμε κάτι με μηδενικό όγκο.

Μπορεί να δειχθεί ότι η διακύμανση διασποράς ισούται με τη μέση τιμή του βαριογράμματος μεταξύ δυο σημείων *x* και *x′* όταν αυτά τα δυο σημεία κινούνται ανεξάρτητα για να καλύψουν όλα τα σημεία μέσα σε ένα μπλοκ μεγέθους *V*. Το μέσο βαριόγραμμα εντός ενός μπλοκ συμβολίζεται συνήθως ως $\bar{\gamma}(V,V)$. Η τιμή αυτή ονομάζεται επίσης *Συνάρτηση F* και αποδίδεται γραφικά στα περισσότερα βιβλία γεωστατιστικής για απλά μοντέλα βαριογραμμάτων. Μπορεί πλέον να υπολογισθεί εύκολα από τα προγράμματα υπολογιστών.

Διακύμανση του v εντός του V

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, αντί να εξετάσουμε μια σημειακή στήριξη o, εξετάζουμε έναν όγκο v και τη ΧΜ που ορίζεται σε αυτόν, $Z_v(x)$. Μας ενδιαφέρει η διασπορά της $Z_v(x)$ όταν κινείται σε ένα μεγαλύτερο χώρο *V*. Για παράδειγμα, ο *v* μπορεί να είναι ένα δείγμα 1m από πυρήνα, ή ένα μπλοκ 10 x 10m (ή και ολόκληρο το κοίτασμα).

Η διακύμανση ενός μικρότερου όγκου *v* εντός ενός μεγαλύτερου όγκου *V* συμβολίζεται $D^2(v|V)$ και ισούται με:

$$\begin{aligned} D^2(v|V) &= E\left[\frac{1}{V}\int_V \{Z_V(x)-m_v\}^2 dx\right] \\ &= \frac{1}{V^2}\int\int_V \gamma(x-x')dxdy - \frac{1}{v^2}\int\int_v \gamma(x-x')dxdy \\ &= \bar{\gamma}(V,V)-\bar{\gamma}(v,v) \\ &= F(V)-F(v) \end{aligned}$$ **Εξίσωση 5-2**

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά ενδιαφέρον, καθώς επιτρέπει τον καθορισμό της διακύμανσης μιας στήριξης δοσμένης μιας άλλης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως *η Σχέση του Krige*. Εκφράζει κάτι που συχνά αναφέρεται ως η σχέση διακύμανσης όγκου.

Η Σχέση του Krige

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να δοθούν ως:

$$D^2(v|V) = D^2(o|V) - D^2(o|v)$$ **Εξίσωση 5-3**

εάν *V* είναι ολόκληρο το κοίτασμα, για παράδειγμα, και *v* είναι το μπλοκ εξόρυξης, και εξετάζουμε τους πυρήνες ως δείγματα σημειακής στήριξης, τότε η έκφραση αυτή απλά δηλώνει ότι:

Η διακύμανση των μπλοκ μέσα στο κοίτασμα **Ισούται** Με τη διακύμανση των πυρήνων στο κοίτασμα μείον τη διακύμανση των πυρήνων μέσα σε ένα μπλοκ

Μπορούμε να ξαναγράψουμε τη σχέση ως εξής:

$$D^2(o|V) = D^2(o|v) + D^2(v|V)$$ **Εξίσωση 5-4**

Που σημαίνει ότι η διακύμανση των πυρήνων στο κοίτασμα ισούται με το άθροισμα της διακύμανσης των πυρήνων εντός ενός μπλοκ και της διακύμανσης των μπλοκ μέσα στο κοίτασμα. Σημειώστε ότι η διακύμανση των σημείων στο κοίτασμα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη διακύμανση μεγαλύτερης στήριξης μέσα στο κοίτασμα, δηλαδή:

D^2 (πυρήνες|κοίτασμα) > D^2 (μπλοκ|κοίτασμα)

Αυτό είναι το *φαινόμενο όγκου*. Δεν θα μπούμε στις λεπτομέρειες του υπολογισμού των συναρτήσεων F καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις οι γεωστατιστικοί πλέον χρησιμοποιούν πρόγραμμα υπολογιστή. Αναφερθείτε στους Journel και Huijbregts (1978) ή τον David (1977) για περισσότερες λεπτομέρειες.

Μεταβολή Στήριξης – Κανονικοποίηση

Χρησιμοποιώντας τη Σχέση του Krige μπορούμε πλέον να βρούμε τη διακύμανση των μπλοκ από τη διακύμανση των σημείων (ή πυρήνων). Οι γεωστατιστικοί αναφέρονται στη διαδικασία λήψης μιας μεγαλύτερης στήριξης από μια μικρότερη ως *κανονικοποίηση*. Ένα απλό παράδειγμα είναι η σύνθεση δειγμάτων πυρήνα 1m σε δείγματα 2m. Ως αποτέλεσμα της κανονικοποίησης, περιμένουμε τις περιεκτικότητες της μεγαλύτερης στήριξης να είναι λιγότερο διάσπαρτες. Γνωρίζουμε ήδη ότι η ΧΜ που ορίζεται για μικρότερη στήριξη είναι διαφορετική από αυτήν που ορίζεται σε μεγαλύτερη στήριξη. Πως μπορούμε να καθορίσουμε το βαριόγραμμα, ας πούμε, των μπλοκ από τα σημεία;

Κανονικοποίηση Βαριογράμματος

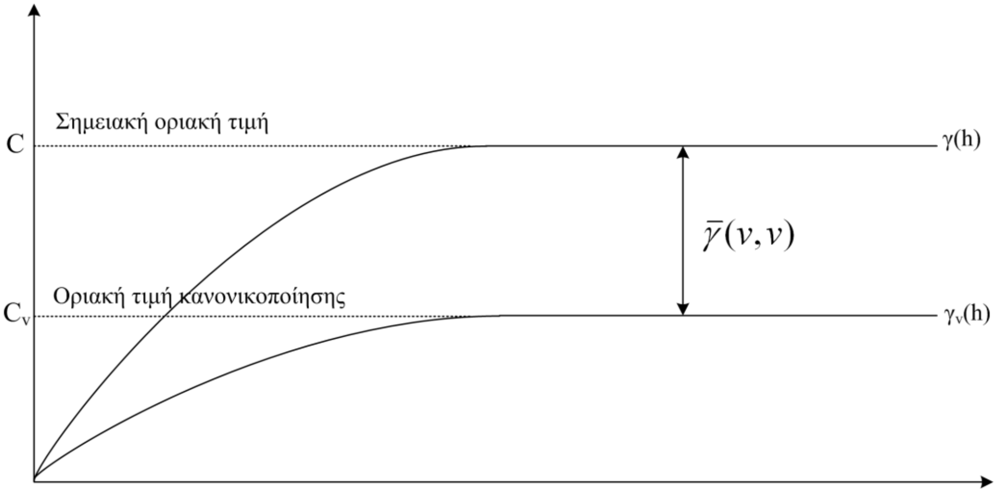
Μπορεί να δειχθεί ότι το βαριόγραμμα μιας μεταβλητής που έχει κανονικοποιηθεί είναι:

$$\gamma_v(h) = \gamma(h) - \bar{\gamma}(v,v)$$ **Εξίσωση 5-5**

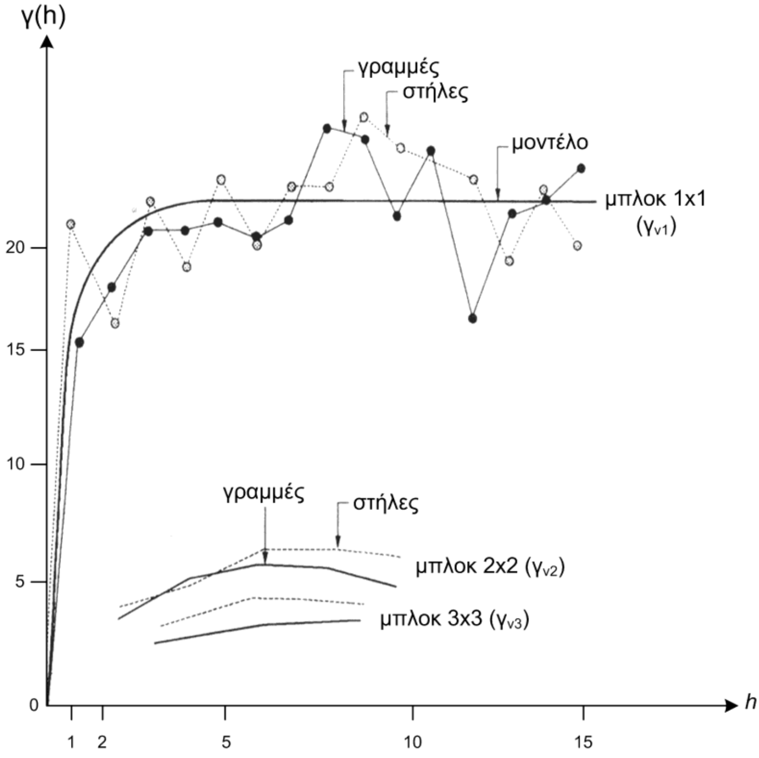
όπου $\gamma_v(h)$ είναι το βαριόγραμμα για στήριξη *v*, $\gamma(h)$ είναι το βαριόγραμμα για σημειακή στήριξη και $\bar{\gamma}(v,v)$ είναι η μέση τιμή της συνάρτησης βαριογράμματος εντός ενός μπλοκ *v*. Η επίπτωση στο βαριόγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 5.4. Σημειώστε ότι μια άλλη επίπτωση στο βαριόγραμμα είναι ότι το σχετικό φαινόμενο ψήγματος μειώνεται καθώς αυξάνεται το μέγεθος της στήριξης.

Συνέχεια Παραδείγματος

Τα βαριογράμματα των 324 δεδομένων υπολογίσθηκαν σε στήλες και γραμμές και αποδίδονται γραφικά στο Σχήμα 5.5. Τα βαριογράμματα για τα μπλοκ 2 x 2 και 3 x 3 επίσης υπολογίσθηκαν και δίνονται στο σχήμα αυτό. Μπορούμε να δούμε πως μεταβλήθηκαν τα βαριογράμματα καθώς αυξήθηκε η στήριξη της ΧΜ. Προφανώς, η άσκηση υπολογισμού του μέσου στην αρχή του κεφαλαίου είναι μια σειρά από βήματα κανονικοποίησης.



Σχήμα 5.4: Επίπτωση της κανονικοποίησης στο βαριόγραμμα.



Σχήμα 5.5: Βαριόγραμμα και μοντέλο για δεδομένα πορώδους.

Ας υποθέσουμε ότι οι πληροφορίες μας είναι το βαριόγραμμα των αρχικών 324 μετρήσεων του πορώδους, το οποία συμβολίζουμε γ_{V1}. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το βαριόγραμμα για να λάβουμε τις διακυμάνσεις των άλλων μπλοκ:

V1	=	βασικό μπλοκ		
V2	=	μπλοκ 2x2	=	4V1
V3	=	μπλοκ 3x3	=	9V1
V6	=	μπλοκ 6x6	=	36V1
V	=	μπλοκ 18x18	=	324V1 (ολόκληρο το κοίτασμα)

Εάν είχαμε ένα μοντέλο για το σημειακό βαριόγραμμα *γ(h)* θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση F και να πάρουμε απλά:

$$D^2(Vi|V) = F(V) - F(Vi) \qquad \textbf{Εξίσωση 5-6}$$

Στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις, η στήριξη στην οποία μετριούνται τα δεδομένα μας είναι αμελητέα σε σχέση με τις διαστάσεις των μπλοκ που εξετάζουμε. Ως αποτέλεσμα, τα δεδομένα μας μπορούν γενικά να θεωρηθούν ως σημειακά και το βαριόγραμμα τους ως σημειακό βαριόγραμμα.

Μάλιστα, στην περίπτωση αυτού του παραδείγματος, υποθέτοντας ότι τα αρχικά μας δεδομένα είναι σημεία είναι λιγότερο αποδεκτό από ότι είναι σε μια μεταλλευτική περίπτωση, γιατί ο V1 είναι μόνο το ένα τέταρτο του V2. Για τον V3 η προσέγγιση είναι πιο αποδεκτή. Το βαριόγραμμα του V1 που δίνεται στο σχήμα 5.5 προσαρμόστηκε ως το άθροισμα δυο σφαιρικών μοντέλων:

$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \gamma_2(h) \qquad \textbf{Εξίσωση 5-7}$$

Το μοντέλο αυτό δίνεται στο σχήμα. Εφαρμόζοντας την εξίσωση αυτή, και κάνοντας χρήση κατάλληλων τιμών της F, παίρνουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.7. Σημειώστε ότι η προσαρμογή του βαριογράμματος μας δεν είναι τέλεια (για παράδειγμα, υπάρχει ένα ελαφρύ φαινόμενο οπής το οποίο δεν έχει ληφθεί υπόψη, και το μοντέλο μάλλον έχει προσαρμοστεί με ένα φαινόμενο ψήγματος). Όμως, τα αποτελέσματα μας για τα μπλοκ 3x3 και 6x6 είναι πολύ κοντά σε αυτά που παρατηρούνται στα ίδια τα δεδομένα. Σημειώστε επίσης ότι στον πίνακα 5.7 δίνεται η διακύμανση που προκύπτει από τη εξίσωση:

$$D^2(v|V) = \frac{D^2(o|V)}{N} \qquad \textbf{Εξίσωση 5-8}$$

σχέση η οποία δεν υποθέτει κάποια χωρική συνέχεια. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν καθαρά ότι είναι λάθος να αδιαφορούμε για τους χωρικούς συσχετισμούς όταν εκτιμούμε τις διακυμάνσεις των μπλοκ. Επίσης δείχνουν ότι η διακύμανση είναι στενά συνδεμένη με τη στήριξη που εξετάζουμε. Αυτή είναι μια από τις σημαντικότερες συνεισφορές της γεωστατιστικής στα μεταλλευτικά προβλήματα.

Πίνακας 5.7: Διακύμανση διαφορετικών στηρίξεων (μονάδες 10^{-4}).			
Στήριξη	**Παρατηρούμενη Διακύμανση**	**Διακύμανση που προβλέπεται από τη γεωστατιστική**	**Διακύμανση που προβλέπεται από την εξίσωση** $\frac{D^2(o\|V)}{N}$
3x3	5.11	4.62	2.48
6x6	1.99	1.76	0.62

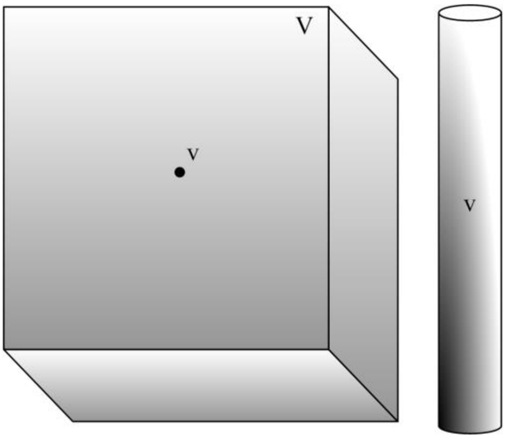
Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Θεωρούμε δύο χωρομεταβλητές – η μία ορίζεται από αναλύσεις περιεκτικότητας γεωτρητικών δειγμάτων μήκους 1m και η δεύτερη από αξιολογήσεις των δειγμάτων της πρώτης σε μήκος 4m. Ποια από τις δύο θα παρουσιάζει υψηλότερη οριακή τιμή στο βαριόγραμμά της;
2. Τι γνωρίζετε για την κανονικοποίηση και την επιρροή της στο βαριόγραμμα;
3. Ποια είναι η σχέση του Krige και ποια η φυσική ερμηνεία της;

6. ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ & ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

Η Ιδέα της Διακύμανσης Επέκτασης

Η γεωστατιστική δίνει τα εργαλεία, μέσω του βαριογράμματος, που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τις διακυμάνσεις εκτίμησης. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή της περιεκτικότητας ενός δοσμένου χώρου *V* χρησιμοποιώντας δεδομένα από μια μικρότερη στήριξη *v*. Για παράδειγμα ο χώρος *V* μπορεί να είναι ένα μπλοκ, και η στήριξη *v* μπορεί να είναι ένα κεντρικό δείγμα πυρήνα (δείτε το Σχήμα 6.1)



Σχήμα 6.1: Στήριξη μπλοκ και δείγματος πυρήνα.

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την περιεκτικότητα *Z(V)* αλλά έχουμε δεδομένα μόνο για την *Z(v)*. Φαίνεται φυσικό να εκτιμήσουμε την *Z(V)* χρησιμοποιώντας την περιεκτικότητα *Z(v)* του δείγματος. Αυτό συμβαίνει φυσικά στην πολυγωνική εκτίμηση του μπλοκ από ένα κεντρικό δείγμα. Γνωρίζουμε ότι η περιεκτικότητα του μπλοκ δεν θα είναι πάντα ίση με την περιεκτικότητα ενός κεντρικού δείγματος, ώστε όταν κάνουμε την εκτίμηση κατά αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε σε σφάλμα. Ποιο είναι το σφάλμα;

Κατ’ αρχήν με την προϋπόθεση της εσωτερικής υπόθεσης, η *Z(v)* είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της *Z(V)*, δηλαδή:

$$E[Z(v) - Z(V)] = 0 \qquad \textbf{Εξίσωση 6-1}$$

Γενικά, το σφάλμα δεν είναι μηδέν. Όμως, ο μέσος όλων των υπέρ και υποεκτιμήσεων θα πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι, είναι πιο ενδιαφέρον να χαρακτηριστεί το σφάλμα που γίνεται κατά την εκτίμηση της *Z(V)* από τη *Z(v)* χρησιμοποιώντας τη διακύμανση, δηλαδή:

$$E[Z(v) - Z(V)]^2 = \mathrm{Var}[Z(v) - Z(V)] = \sigma^2_e(v,V) \qquad \textbf{Εξίσωση 6-2}$$

Όπου $\sigma^2_e(v,V)$ είναι η διακύμανση επέκτασης. Αυτή είναι η διακύμανση του σφάλματος που κάνουμε όταν επεκτείνουμε στον χώρο *V* την περιεκτικότητα που μετριέται στον χώρο *v*. Με άλλα λόγια, η διακύμανση επέκτασης της τιμής ενός δείγματος που λαμβάνεται από ένα τμήμα μεταλλεύματος είναι το μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα που γίνεται κατά την υπόθεση ότι αυτή η τιμή του δείγματος είναι η πραγματική τιμή του τμήματος. Στο παράδειγμα μας, η διακύμανση επέκτασης είναι κατά συνέπεια το μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα που γίνεται υποθέτοντας ότι η τιμή του δείγματος επεκτείνεται σε ολόκληρο το τμήμα.

Διακύμανση Επέκτασης και Διακύμανση Εκτίμησης

Θεωρητικά, η $\sigma^2_e(v,V)$ είναι απλά η διακύμανση της εκτίμησης της *Z(V)* από τη *Z(v)*. Συχνά, οι όροι *διακύμανση εκτίμησης* και *διακύμανση επέκτασης* θεωρούνται συνώνυμοι. Χρησιμοποιείται ο ίδιος συμβολισμός και θεωρητικά είναι ισοδύναμες. Όμως, ο όρος *διακύμανση εκτίμησης* γενικά χρησιμοποιείται με μια ευρύτερη έννοια: η διακύμανση εκτίμησης είναι το άθροισμα όλων των διακυμάνσεων σφάλματος που σχετίζονται με την εκτίμηση της μέσης περιεκτικότητας ενός δοσμένου όγκου (τμήματος, βαθμίδας, σώματος μεταλλοφορίας, κλπ). Στη γεωστατιστική λοιπόν ο όρος διακύμανση εκτίμησης χρησιμοποιείται για πιο γενικές περιπτώσεις, όπου πολλά δείγματα συνδυάζονται για να εκτιμηθεί μια δοσμένη περιοχή ή ένας όγκος.

Η Εξίσωση της Διακύμανσης Επέκτασης

Η θεωρητική τιμή της διακύμανσης επέκτασης μπορεί να υπολογισθεί από την παρακάτω εξίσωση:

$$\sigma_e^2(v,V) = 2\bar{\gamma}(v,V) - \bar{\gamma}(V,V) - \bar{\gamma}(v,v) \qquad \textbf{Εξίσωση 6-3}$$

όπου:

v είναι η μικρή στήριξη τοποθετημένη κεντρικά στον *V*.

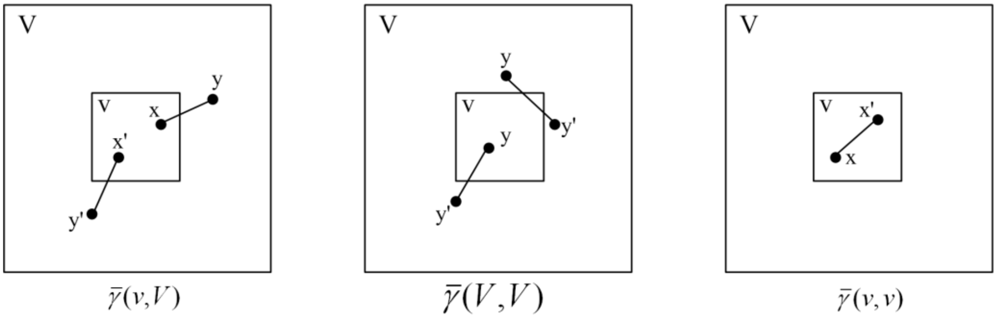
V είναι η μεγαλύτερη στήριξη (μπλοκ).

$\sigma^2_e(v,V)$ είναι η διακύμανση επέκταση που μόλις εισάγαμε.

$\bar{\gamma}(v,v)$ είναι η μέση τιμή του βαριογράμματος μεταξύ δυο σημείων που κινούνται ανεξάρτητα μέσα στον όγκο *v*. Είναι η διακύμανση διασποράς των σημείων εντός μιας στήριξης μεγέθους *v*. Υπολογίζεται εύκολα από τη συνάρτηση F(*v*) που είδαμε νωρίτερα.

$\bar{\gamma}(V,V)$ είναι η μέση τιμή του βαριογράμματος μεταξύ δυο σημείων που κινούνται ανεξάρτητα εντός του όγκου *V*. Είναι η διακύμανση διασποράς των σημείων εντός μιας στήριξης μεγέθους *V*. Υπολογίζεται εύκολα από τη συνάρτηση F(*v*).

$\bar{\gamma}(v,V)$ είναι η μέση τιμή του βαριογράμματος μεταξύ δυο σημείων, το ένα κινείται ανεξάρτητα μέσα στον *v* και το άλλο εντός του *V*. Είναι η διακύμανση διασποράς της στήριξης *v* μέσα στη στήριξη *V*. Υπολογίζεται επίσης μέσω μιας συμπληρωματικής συνάρτησης. Οι αρχές αυτές δίνονται στο Σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.2: Αρχές των διακυμάνσεων επέκτασης.

Η εξίσωση 6-3 ισχύει για οποιαδήποτε σχήματα του *v* και *V*. Μάλιστα ο *v* δεν χρειάζεται να είναι εντός του *V*. Οι παράγοντες που επηρεάζουν τη διακύμανση επέκτασης είναι:

1. Η κανονικότητα της μεταβλητής — μέσω του μοντέλου του $\gamma(h)$
2. Η γεωμετρία του *V* — μέσω του $\bar{\gamma}(V,V)$
3. Η γεωμετρία του *v* — μέσω του $\bar{\gamma}(v,v)$
4. Η θέση του *v* ως προς *V* — μέσω του $\bar{\gamma}(v,V)$

Παράγοντες που Επηρεάζουν τη Διακύμανση Επέκτασης

Εάν εξετάσουμε την εξίσωση 6-3 πάλι:

$$\sigma_e^2(v,V) = 2\bar{\gamma}(v,V) - \bar{\gamma}(V,V) - \bar{\gamma}(v,v)$$

μπορούμε να τη ξαναγράψουμε σε δύο όρους:

$$\sigma_e^2(v,V) = \{\bar{\gamma}(v,V) - \bar{\gamma}(V,V)\} + \{\bar{\gamma}(v,V) - \bar{\gamma}(v,v)\} \qquad \textbf{Εξίσωση 6-4}$$

Έτσι γίνεται πιο προφανές ότι η διακύμανση επέκτασης $\sigma^2_e(v,V)$ μειώνεται καθώς:

- Η δειγματοληψία *v* του χώρου που εκτιμάται *V* γίνεται μεγαλύτερη. Μπορούμε να το δούμε εξετάζοντας την ακραία περίπτωση όπου *v*=*V*. Σε μια τέτοια περίπτωση το $\bar{\gamma}(V,V)$ είναι το ίδιο με το $\bar{\gamma}(v,v)$. Έτσι οι δύο όροι της (ii) είναι ίσοι και η $\sigma^2_e(v,V)$ είναι μηδέν.

- Το βαριόγραμμα είναι πιο κανονικό, δηλαδή η ΧΜ είναι πιο συνεχής.

Σχετικά με τον δεύτερο παράγοντα, μια ιδιαίτερα ασυνεχής μεταβλητή θα είχε ένα βαριόγραμμα που προσεγγίζει εκείνο του καθαρού φαινόμενου ψήγματος. Στην περίπτωση αυτή, ένα δείγμα μέσα σε ένα μπλοκ δεν είναι αντιπροσωπευτικό της περιεκτικότητας του και δεν είναι δυνατή η τοπική εκτίμηση. Κάνουμε το μέγιστο σφάλμα σε αυτήν την περίπτωση. Αυτό είναι ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα, γιατί καμιά φορά κάποιοι ισχυρίζονται ότι ‘χρησιμοποιούμε έναν πολυγωνικό εκτιμητή για τον έλεγχο της περιεκτικότητας των μπλοκ γιατί δεν έχουμε καλό βαριόγραμμα (δηλαδή φαινόμενο ψήγματος)’. Ουσιαστικά, αυτές είναι οι πιο καταστροφικές συνθήκες για να χρησιμοποιήσει κανείς αυτόν τον τύπο εκτιμητή!

Σημειώστε επίσης ότι, εάν μόνο ένα δείγμα είναι διαθέσιμο για ένα δοσμένο μπλοκ φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι μια κεντρική θέση στο μπλοκ για το δείγμα είναι και η ιδανική, με την έννοια της ελαχιστοποίησης της $\sigma^2_e(v,V)$. Αυτό πηγάζει από τη γεωστατιστική θεωρία: η διακύμανση επέκτασης που σχετίζεται με τη χρήση της περιεκτικότητας ενός δείγματος σε μια γωνία ενός μπλοκ, για παράδειγμα, είναι υψηλότερη από αυτήν ενός δείγματος στο κέντρο του μπλοκ.

Άλλες Ιδιότητες

Μια προφανής, αλλά σημαντική ιδιότητα των διακυμάνσεων επέκτασης είναι ότι περιλαμβάνουν μόνο τη γεωμετρία των δειγμάτων/μπλοκ και του μοντέλου βαριογράμματος: *δεν περιλαμβάνουν τα πραγματικά δείγματα που σχετίζονται με μια συγκεκριμένη περίπτωση*. Αυτό σημαίνει ότι ο καθορισμός μιας κατάλληλης γεωμετρίας δειγματοληψίας συγκρίνοντας διακυμάνσεις εκτίμησης διαφορετικών περιπτώσεων απαιτεί μόνο ένα αποδεκτό μοντέλο βαριογράμματος.

Από την άλλη μεριά, δεν λαμβάνει υπόψη τοπικές συνθήκες, για παράδειγμα, εάν θέλουμε να εκτιμήσουμε το μπλοκ μας από ένα κεντρικό δείγμα που συμβαίνει να είναι η μέγιστη περιεκτικότητα του κοιτάσματος, περιμένουμε μια χειρότερη διακύμανση σφάλματος από τη μέση διακύμανση σφάλματος που δίνεται από τη διακύμανση επέκτασης.

Διακύμανση Επέκτασης & Διακύμανση Διασποράς

Η διακύμανση επέκτασης $\sigma^2_e(v,V)$ δεν θα πρέπει να συγχέεται με τη διακύμανση διασποράς $D^2(v|V)$, παρόλο που χρησιμοποιούμε τις διακυμάνσεις διασποράς για τον καθορισμό της διακύμανσης επέκτασης. Περιληπτικά:

Πίνακας 6.1: Διακύμανση Επέκτασης και Διασποράς	
Διακύμανση Διασποράς $D^2(v\|V)$	**Διακύμανση Επέκτασης** $\sigma^2_e(v,V)$
Αυτή είναι η διακύμανση των περιεκτικοτήτων που ορίζονται σε μια στήριξη *v* μέσα σε μια άλλη *V* πχ. Η διακύμανση των σημείων μέσα σε ένα μπλοκ ή η διακύμανση των πυρήνων μέσα σε ένα κοίτασμα	Αυτή είναι η διακύμανση του σφάλματος που κάνουμε όταν υποθέτουμε ότι η περιεκτικότητα ενός όγκου *v* είναι η πραγματική περιεκτικότητα ενός μεγαλύτερου όγκου *V* πχ. όταν εκτιμούμε ένα μπλοκ 5 x 5 x 5m από ένα κεντρικό, γεωτρητικό δείγμα μήκους 5m ή όταν εκτιμούμε το μέσο πάχος ενός στρώματος άνθρακα σε μια περιοχή 100 x 100m από μια μοναδική μέτρηση στη μια γωνία της περιοχής
Φυσική Σημασία	**Θεωρητική Σημασία**

Για να γίνει πιο κατανοητό: η διακύμανση διασποράς έχει μια φυσική σημασία: μετράει τη διακύμανση των δειγμάτων μεγέθους *v* μέσα στο χώρο *V*. Σε αντίθεση, η διακύμανση επέκτασης είναι μια χρήσιμη ιδέα που μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε το σφάλμα που σχετίζεται με την εκτίμηση ενός όγκου από ένα δείγμα συγκεκριμένης στήριξης.

Πάλι, σε πολλές περιπτώσεις, ο όγκος των δειγμάτων μας είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με τα μπλοκ που εξετάζουμε. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε τη στήριξη δείγματος να είναι σημειακή. Η εξίσωση μας τότε απλοποιείται ως εξής:

$$\sigma_e^2(o,V) = 2\bar{\gamma}(o,V) - \bar{\gamma}(V,V) \qquad \textbf{Εξίσωση 6-5}$$

Πρακτικά

Υπάρχουν συμπληρωματικές συναρτήσεις για τον υπολογισμό όλων των όρων που απαιτούνται για την εξέταση διαφόρων διακυμάνσεων επέκτασης. Η Συνάρτηση F και άλλες συναρτήσεις του είδους δεν έχουν κατάλληλες αναλυτικές μορφές, και για το λόγο αυτό ιστορικά λαμβάνονται μέσω γραφημάτων και πινάκων τιμών (Journel και Huijbregts, 1978), αν και στις μέρες μας αυτό γίνεται μέσω υπολογιστή. Τα προγράμματα μας δίνουν τις απαραίτητες τιμές που επιτρέπουν τον υπολογισμό των διακυμάνσεων επέκτασης από μια πληθώρα περιπτώσεων (1Δ, 2Δ, 3Δ, σημείο εντός μπλοκ, σημείο στα όρια του μπλοκ, κλπ). Σημειώστε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για ένα μοναδικό μπλοκ *V*.

Συνδυασμός Στοιχειωδών Διακυμάνσεων Επέκτασης

Για τον υπολογισμό της συνολικής διακύμανση εκτίμησης σ^2_E όταν εκτιμάται ένας όγκος V που αποτελείται από *N* στοιχειώδη μπλοκ, το καθένα με όγκο *v* και έχοντας μια στοιχειώδη διακύμανση σ^2_e μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος γνωστή ως *συνδυασμός στοιχειωδών διακυμάνσεων επέκτασης* (Journel και Huijbregts, 1978, σελ. 413). Η εξίσωση που χρησιμοποιείται είναι απλή:

$$\sigma_E^2 = \frac{\sigma_e^2}{N}$$ **Εξίσωση 6-6**

Η διακύμανση επέκτασης που υπολογίζεται σχετίζεται με την εκτίμηση της μέσης περιεκτικότητας ενός όγκου *V* από *N* δείγματα, το καθένα κεντρικά τοποθετημένο σε ένα από τα *N* μπλοκ *v* με στοιχειώδη διακύμανση επέκτασης σ^2_e. Δεν λαμβάνει υπόψη οποιοδήποτε σφάλμα σχετικό με την εκτίμηση της γεωμετρίας της μεταλλοφορίας.

Μια Σημαντική Παραδοχή

Η παραπάνω μέθοδος επίσης υποθέτει ότι το σφάλμα που γίνεται για οποιοδήποτε μπλοκ είναι ανεξάρτητο των σφαλμάτων που γίνονται για τα άλλα μπλοκ. Αυτή είναι γενικά μια έγκυρη παραδοχή εάν τα μπλοκ είναι αρκετά μεγάλα και υπάρχει μόνο ένα δείγμα σε κάθε μπλοκ.

Γεωμετρία της Μεταλλοφορίας

Όταν εκτιμάται μια ζώνη από έναν αριθμό δειγμάτων, το σφάλμα που σχετίζεται με την εκτίμηση της γεωμετρίας της μεταλλοφορίας αυτής θα πρέπει να ληφθεί υπόψη. Δεδομένου ότι υπάρχουν *n* κανονικά διατεταγμένες γεωτρήσεις στη μεταλλοφορία (όπως και αν ορίζεται αυτή), η παρακάτω εξίσωση δίνει μια 'καλή' εκτίμηση της σχετικής διακύμανσης εκτίμησης για μια επιφάνεια (David, 1977):

$$\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{N_2}{6} + 0.061\frac{N_1^2}{N_2}\right) \quad N_2 \leq N_1$$ **Εξίσωση 6-7**

Η προέλευση της εξίσωσης αυτής (από τον George Matheron) ήταν ο υπολογισμός των διακυμάνσεων εκτίμησης μιας μεταβλητής δείκτη όπου κάθε γεώτρηση είχε μια τιμή 0 για στείρα και 1 για μετάλλευμα. Υπάρχουν *n* 'θετικές' κανονικά διατεταγμένες γεωτρήσεις, κάθε μια στο κέντρο τμήματος (*v*) διαστάσεων *l* x *L*, δηλαδή n τμήματα. Υπάρχουν N_1 τμήματα στη μια διεύθυνση και N_2 στην άλλη.

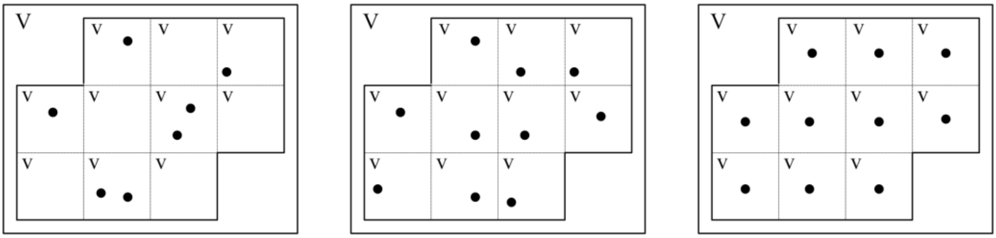
Έχοντας υπολογίσει έναν όρο επέκτασης σ^2_E και έναν επιφανειακό όρο σ^2_S μπορεί να υπολογισθεί ένας 'συνολικός' όρος σφάλματος σ^2_T :

$$\frac{\sigma_T^2}{m^2} = \frac{\sigma_E^2}{m^2} + \frac{\sigma_S^2}{s^2}$$ **Εξίσωση 6-8**

Το γεωμετρικό σφάλμα σ^2_S στην περίπτωση αυτή θα εξεταζόταν χρησιμοποιώντας δισδιάστατη μεθοδολογία. Επομένως ένα τρισδιάστατο πρόβλημα θα αναγόταν σε δυο διαστάσεις και τα αποτελέσματα θα ήταν μόνο ενδεικτικά.

Διατάξεις Δειγματοληψίας

Η ιδέα της διακύμανσης επέκτασης και του συνδυασμού των στοιχειωδών διακυμάνσεων επέκτασης μας επιτρέπει να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα των διατάξεων δειγματοληψίας (ή της γεωμετρίας τους). Υπάρχουν τρεις γενικοί τύποι γεωμετρίας δειγματοληψίας όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Διατάξεις (γεωμετρία) δειγματοληψίας.

Θα εξετάσουμε την κάθε μια ξεχωριστά παρακάτω:

Τυχαία Διάταξη

Η τυχαία δειγματοληψία είναι ασυνήθιστη στη μεταλλευτική, όμως υπάρχουν περιπτώσεις όπου παλαιότερα δεδομένα, ή τομές σε μια φλέβα σε βάθος (λόγω έλλειψης ελέγχου στις βαθιές γεωτρήσεις) μπορεί να ακολουθούν μια τέτοια διάταξη.

Για να εκτιμηθεί η μέση τιμή $Z(V)$ στον V παίρνουμε τη μέση τιμή των N δειγμάτων $Z(x_i)$ τυχαία κατανεμημένων εντός του V. Θα υποθέσουμε ότι τα δείγματα μας έχουν σημειακή στήριξη (δηλαδή ότι είναι πολύ μικρά σε σχέση με τον χώρο που εξετάζουμε). Μπορεί να δειχθεί ότι η διακύμανση του σφάλματος είναι:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{N} D^2(o|V)$$ **Εξίσωση 6-9**

όπου $D^2(o|V)$ είναι απλά η διακύμανση διασποράς των σημείων μέσα στο χώρο που γίνεται η εκτίμηση, δηλαδή η διακύμανση των δειγμάτων.

Τυχαίο Πλέγμα (ΤΠ)

Αυτή τη φορά, ο *V* διαιρείται σε *N* όμοιες υπο-ζώνες. Μέσα σε κάθε μια από αυτές παίρνεται ένα δείγμα σε μια τυχαία θέση. Έτσι η διάταξη αυτή είναι λιγότερο 'τυχαία' από την πραγματικά τυχαία δειγματοληψία. Οι τομές σε μια φλέβα σε βάθος που πρόκειται να είναι σε ένα κανονικό πλέγμα στο επίπεδο της φλέβας μπορεί να την ακολουθούν απλά ως συνέπεια των αποκλίσεων των γεωτρήσεων. Τα ΤΠ χρησιμοποιούνται επίσης μερικές φορές στις γεωχημικές διερευνήσεις εδάφους.

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να δειχθεί ότι η διακύμανση της εκτίμησης έχει την ίδια μορφή με την εντελώς τυχαία περίπτωση, και είναι:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{N} D^2(o|v)$$ **Εξίσωση 6-10**

Σημειώστε ότι η $D^2(o|V)$ έχει αντικατασταθεί με την $D^2(o|v)$. Εφόσον γνωρίζουμε από τη σχέση του Krige ότι η $D^2(o|V)$ είναι πάντα μεγαλύτερη από την $D^2(o|v)$:

$$D^2(o|V) - D^2(o|v) = D^2(v|V) \geq 0$$ **Εξίσωση 6-11**

Έτσι, η διακύμανση εκτίμησης για ένα ΤΠ θα είναι πάντα μικρότερη από αυτήν ενός εντελώς τυχαίου πλέγματος, καθώς:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{N} D^2(o|v) < \frac{1}{N} D^2(o|V)$$ **Εξίσωση 6-12**

Αυτό δείχνει ότι το Τυχαίο Πλέγμα είναι πιο αποτελεσματικό από μια εντελώς τυχαία διάταξη.

Κανονικό Πλέγμα

Είδαμε ότι στην περίπτωση αυτή η διακύμανση εκτίμησης μπορεί να προσεγγισθεί από την αρχή του συνδυασμού των στοιχειωδών διακυμάνσεων επέκτασης, δηλαδή διαιρώντας τη διακύμανση επέκτασης ενός κεντρικού δείγματος σε ένα στοιχειώδες μπλοκ δια *N* (το πλήθος των στοιχειωδών μπλοκ):

$$\sigma_E^2 = \frac{\sigma_e^2}{N}$$ **Εξίσωση 6-13**

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση εκτίμησης ενός δοσμένου πλέγματος, για ένα καθορισμένο χώρο *V* και γνωστό μοντέλο βαριογράμματος. Ο Delfiner (1979) δίνει μια σύγκριση για ένα γραμμικό μοντέλο βαριογράμματος, που δείχνει ότι για μια δοσμένη περίπτωση, η αναλογία μεταξύ της διακύμανσης εκτίμησης για ένα ΤΠ και ένα κανονικό πλέγμα είναι περίπου 2.14. Με άλλα λόγια, ένα κανονικό πλέγμα είναι καλύτερο από δυο φορές την αποτελεσματικότητα ενός ΤΠ (για τον ίδιο αριθμό δειγμάτων). Γνωρίζουμε ότι το ΤΠ είναι πάντα πιο αποτελεσματικό από μια εντελώς τυχαία διάταξη. Μάλιστα, ο Delfiner μας δίνει μια σύγκριση για τρεις περιπτώσεις όταν ο χώρος είναι τετράγωνος. Εκφράζει τις διακυμάνσεις εκτίμησης σε όρους διακύμανσης δειγμάτων ($\sigma^2 = D^2(o|V)$ και πλήθους δειγμάτων *N*:

Πίνακας 6.2: Διακυμάνσεις εκτίμησης για τη μέση περιεκτικότητα σε ένα τετράγωνο (με γραμμικό βαριόγραμμα και *N* δείγματα)		
Τυχαία Διάταξη	**ΤΠ**	**Κανονική Διάταξη**
$\frac{\sigma^2}{N}$	$\frac{\sigma^2}{N^{3/2}}$	$\frac{\sigma^2}{2.14 \times N^{3/2}}$

Μπορούμε να καταλάβουμε το όφελος μιας κανονικής διάταξης δειγματοληψίας από τον παραπάνω πίνακα. Η διακύμανση μειώνεται σημαντικά καθώς η γεωμετρία μας γίνεται πιο κανονική.

Μια κανονική διάταξη εκμεταλλεύεται τον χωρικό συσχετισμό των περιεκτικοτήτων: βάζοντας δυο δείγματα πολύ κοντά μεταξύ τους παράγει περιττές πληροφορίες, και (δεδομένου του περιορισμένου πλήθους των δειγμάτων) υπονοεί ότι κάποιο άλλο τμήμα του χώρου θα έχει ελλιπή δειγματοληψία.

Παρόμοια αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν για ένα περιορισμένο μοντέλο βαριογράμματος (ας πούμε, το σφαιρικό), αλλά η διακύμανση εκτίμησης τώρα εξαρτάται από το εύρος *α* του βαριογράμματος.

Μπορεί να δειχθεί ότι το κανονικό πλέγμα θα αποδίδει καλύτερα από το ΤΠ ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση, αλλά το πλεονέκτημα μειώνεται καθώς το μέγεθος του πλέγματος αυξάνει ανάλογα με το εύρος του βαριογράμματος. Ξανά, αυτό στηρίζεται στην κοινή λογική: καθώς το στοιχειώδες κελί του πλέγματος μας γίνεται πολύ μεγαλύτερο από το εύρος του βαριογράμματος, η επιρροή ενός δείγματος γίνεται, σχετικά, τοπική. Συνεπώς, η στρατηγική υπεροχή της κεντρικής θέσης μειώνεται. Μάλιστα, καθώς το *α* γίνεται μικρό συγκριτικά με τις διαστάσεις του κελιού του πλέγματος μας, η κατάσταση ολοένα και πλησιάζει στο μοντέλο καθαρού φαινόμενο ψήγματος (δηλαδή $\alpha \rightarrow 0$).

Ο Delfiner μας δίνει το παρακάτω παράδειγμα, στο οποίο έδωσε σε πίνακα, για διάφορα μεγέθη κελιών, τη διακύμανση διασποράς των σημείων σε ένα κελί *v* (η διακύμανση εκτίμησης ενός ΤΠ είναι ανάλογη σε αυτήν) και τη διακύμανση επέκτασης του ίδιου κελιού (χρησιμοποιώντας σφαιρικό μοντέλο) (Πίνακας 6.3).

Σημειώστε ότι, εφόσον το μήκος του κελιού ξεφύγει από το εύρος του βαριογράμματος, το πλεονέκτημα του κανονικού πλέγματος πέφτει απότομα. Ένας άλλος τρόπος για να το δει κανείς αυτό είναι ότι η διακύμανση εκτίμησης που σχετίζεται μα ένα μοναδικό κελί αυξάνει πολύ γρήγορα εάν το διάστημα του πλέγματος είναι πολύ μεγάλο.

Πίνακας 6.3: Παράδειγμα του Delfiner.			
Διαστάσεις Πλέγματος σε Μονάδες Εύρους (α)	$D^2(o\|v)$	$\sigma^2_e(o,v)$	**Αναλογία**
0.15α	0.118	0.056	2.107
0.2α	0.115	0.074	2.094
0.4α	0.31	0.15	2.067
0.6α	0.45	0.235	1.915
0.8α	0.56	0.32	1.75
1.0α	0.66	0.41	1.61
1.5α	0.81	0.65	1.25
2.0α	0.88	0.80	1.1
3.0α	0.94	0.92	1.02
5.0α	0.977	0.96	1.017
8.0α	0.9906	0.99	≈1.00

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Σε ποιους γενικούς τύπους εντάσονται οι διατάξεις δειγματοληψίας (και σχηματικά); Ποια διάταξη οδηγεί σε καλύτερες εκτιμήσεις (μικρότερη διακύμανση εκτίμησης);
2. Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στη διακύμανση διασποράς και τη διακύμανση επέκτασης;
3. Ποιες είναι οι παράμετροι που επηρεάζουν τη διακύμανση επέκτασης και με ποιες τιμές βαριογράμματος προσεγγίζονται;
4. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στη διακύμανση επέκτασης και τη διακύμανση εκτίμησης;

7. KRIGING

Εκτίμηση

Τα δεδομένα δειγματοληψίας από γεωτρήσεις, κανάλια κλπ. δίνουν στον γεωλόγο και τον μεταλλειολόγο τμηματικές πληροφορίες. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε όταν κάνουμε εκτίμηση αποθεμάτων είναι στην ανάγκη να γνωρίζουμε την περιεκτικότητα ολόκληρου του κοιτάσματος, ή συγκεκριμένων μπλοκ εντός του κοιτάσματος. Η μόνη λύση στο πρόβλημα αυτό είναι οι εκτιμήσεις.

Καμιά επεξεργασία δεδομένων, τα μαθηματικά ή τα προγράμματα των υπολογιστών δεν μπορούν να μας πουν ποια είναι η περιεκτικότητα ενός άγνωστου σημείου στο κοίτασμα μας. Υπάρχει πάντα αβεβαιότητα μεταξύ των θέσεων των δειγμάτων. Μάλιστα, υπάρχει αβεβαιότητα ακόμα και στα ίδια τα δείγματα, και αυτό φαίνεται στο φαινόμενο ψήγματος, όπως συζητήσαμε νωρίτερα.

Έτσι θα πρέπει να κάνουμε εκτιμήσεις, και ο στόχος είναι σίγουρα να κάνουμε τις 'καλύτερες' εκτιμήσεις που μπορούμε, να χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα μας σωστά, δηλαδή να αξιοποιήσουμε στο έπακρο τις πληροφορίες μας (τα δείγματα). Θα εξετάσουμε το θέμα του 'καλύτερου' σε λίγο, αλλά πρώτα ας εξετάσουμε την ιδέα της εκτίμησης με περισσότερη λεπτομέρεια.

Οι περισσότεροι γεωλόγοι αισθάνονται άνετοι με την ιδέα κάποιων ζυγισμένων μέσω των τιμών των δειγμάτων για την εκτίμηση μπλοκ σε ένα κοίτασμα. Μια 'κλασσική' τέτοια μέθοδος είναι η χρήση της αντιστρόφου αποστάσεως.

Στις μεθόδους αυτές, οι συντελεστές βάρους (ή απλά τα βάρη) που εφαρμόζονται στα δείγματα είναι συνάρτηση της θέσης του δείγματος ως προς το μπλοκ που εκτιμάται. Δείγματα κοντά στο μπλοκ παίρνουν μεγαλύτερα βάρη από εκείνα που είναι μακριά. Κάποια γενική ιδέα της μεταβλητότητας της μεταλλοφορίας μπορεί να ληφθεί υπόψη (χρησιμοποιώντας μεγαλύτερες δυνάμεις, για παράδειγμα, τετραγωνικές, κυβικές κλπ. αντίστροφες αποστάσεις), αλλά δεν γίνεται κάποια ουσιαστική αναφορά στο συγκεκριμένο κοίτασμα που εξετάζεται.

Το ότι η μέθοδος αντιστρόφου αποστάσεως είναι πιο ελκυστική στους γεωλόγους των μεταλλείων από τις πολυγωνικές μεθόδους δεν μας εκπλήσσει – οι περιεκτικότητες στα κοιτάσματα είναι, σχεδόν πάντα, συσχετισμένες στο χώρο, συχνά σε μεγάλες αποστάσεις. Εξαιτίας αυτού του συσχετισμού, δείγματα έξω από το μπλοκ που εκτιμάται μπορούν να αποκαλύψουν πληροφορίες για την περιεκτικότητα του μπλοκ, και έτσι να βελτιώσουν την ακρίβεια της εκτίμησης σε σύγκριση με τις πολυγωνικές μεθόδους. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν ζυγισμένους μέσους τοπικών δεδομένων επομένως αντιπροσωπεύουν μια σημαντική βελτίωση ως προς τις πολυγωνικές μεθόδους.

Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει κανένας λόγος για τη χρήση της μεθόδου αντιστρόφου αποστάσεως στα κοιτάσματα, ή, για να το θέσουμε διαφορετικά και σύμφωνα με τα λεγόμενα του A.G. Royle *'ενώ η αντίστροφος του τετραγώνου της αποστάσεως μπορεί να έχει κάποια φυσική σχέση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, δεν έχει καμία σχέση με την κατανομή των περιεκτικοτήτων σε ένα κοίτασμα'*. Ποτέ δεν ξεκαθαρίστηκε από οποιονδήποτε οπαδό της μεθόδου αυτής γιατί μια συγκεκριμένη δύναμη της αντιστρόφου αποστάσεως θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί στη διαδικασία εκτίμησης αποθεμάτων.

Τι Θέλουμε Από Έναν Εκτιμητή

Τι επιθυμούμε από έναν εκτιμητή; Το λιγότερο απαιτούμε μια ακριβή εκτίμηση, δηλαδή θέλουμε οι εκτιμήσεις μας να είναι (κατά μέσο όρο) όσο το δυνατό πιο κοντά στις 'πραγματικές' περιεκτικότητες. Η ακρίβεια των εκτιμήσεων εξαρτάται από έναν αριθμό παραγόντων, δηλαδή εκείνους που επηρεάζουν τη διακύμανση εκτίμησης που συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

1. **Ο αριθμός των δειγμάτων και η ποιότητα των δεδομένων σε κάθε δείγμα.** Η ποιότητα μπορεί να αλλάζει σημαντικά από ένα δείγμα σε άλλο. Ο εκτιμητής μας δεν θα πρέπει απαραίτητα να δίνει την ίδια σημασία σε κάθε δείγμα που χρησιμοποιείται στη εκτίμηση.
2. **Η γεωμετρία των δειγμάτων στο κοίτασμα.** Ιδιαίτερα, η ομαδοποίηση των δειγμάτων μπορεί να κάνει κάποιες πληροφορίες δειγματοληψίας 'περιττές', τουλάχιστον εν μέρει. Γενικά, μια ομαλή κατανομή των δειγμάτων μέσα στο κοίτασμα πετυχαίνει καλύτερη κάλυψη και δίνει περισσότερες πληροφορίες από έναν ισοδύναμο αριθμό δειγμάτων που είναι τοπικά ομαδοποιημένα.
3. **Η απόσταση μεταξύ ενός δείγματος και της περιοχής που θέλουμε να εκτιμήσουμε.** Εάν θέλουμε να εκτιμήσουμε ένα συγκεκριμένο μπλοκ, είναι φυσικό να δώσουμε περισσότερο βάρος σε δείγματα κοντά στο μπλοκ που μας ενδιαφέρει από ότι σε μακρινά δείγματα. Ομοίως, εάν θέλουμε να κάνουμε σημειακές εκτιμήσεις (για παράδειγμα, της μεταβλητής πάχους) περιμένουμε από τον εκτιμητή μας να είναι ακριβής στα σημεία που έχουμε τα δεδομένα, πιο αξιόπιστος κοντά στα σημεία των δειγμάτων, και να πέφτει σε αξιοπιστία καθώς η απόσταση από το κοντινότερο δείγμα αυξάνεται.
4. **Η χωρική συνέχεια των μεταβλητών παρεμβολής.** Θα πρέπει να απαιτήσουμε κάτι περισσότερο από μια αυθαίρετη πτώση του βάρους καθώς αυξάνει η απόσταση από το μπλοκ ή σημείο που εκτιμάται, όπως γίνεται στη μέθοδο αντιστρόφου αποστάσεως. Θα πρέπει επίσης να ζητήσουμε η χωρική μεταβλητότητα της μεταβλητής μας να συμπεριληφθεί στις εκτιμήσεις μας. Μεταβλητές με πολύ ομαλές μεταβολές (για παράδειγμα η οροφή ενός ομαλά παραμορφωμένου γεωλογικού ορίζοντα) δεν θα πρέπει να ζυγίζονται κατά τον ίδιο τρόπο με μεταβλητές με πιο ακανόνιστη χωρική διακύμανση, όπως οι περιεκτικότητες των μετάλλων.

Θέλουμε ο εκτιμητής μας να είναι αμερόληπτος, δηλαδή το μέσο σφάλμα εκτίμησης να είναι μηδέν (ώστε ο μέσος των εκτιμήσεων να είναι πάντα ίσος με τον μέσο των πραγματικών περιεκτικοτήτων). Θα θέλαμε επίσης να έχουμε κάποιο δείκτη της αξιοπιστίας των εκτιμήσεων.

Γιατί Kriging;

Το kriging είναι μια μέθοδος εκτίμησης που λαμβάνει υπόψη τους παράγοντες που μόλις αναφέραμε ως επιθυμητούς για έναν εκτιμητή. Οι ιδιότητες αυτές προέρχονται εν μέρει από το γεγονός ότι το kriging χρησιμοποιεί τον μοντελοποιημένο χωρικό συσχετισμό για την απόδοση βαρών.

Ο όρος ‘kriging’ αποδόθηκε από τον G. Matheron του Centre de Geostatistique στο Fontainebleau προς τιμή του D.G. Krige, ο οποίος πρωτοπόρησε στη χρήση στατιστικών μεθόδων για την εκτίμηση αποθεμάτων στη Νότια Αφρική κατά τη δεκαετία του ’50. Το kriging χρησιμοποιείται εκτενώς από τις αρχές του 1970, αρχικά στις μεταλλευτικές βιομηχανίες της Δυτικής Ευρώπης και της Νότιας Αφρικής. Σήμερα το kriging χρησιμοποιείται από πολλές μεταλλευτικές εταιρείες στη Βόρεια και Νότια Αμερική, την Αυστραλία, την Αφρική και την Ασία. Η χρήση του επίσης διαδόθηκε και σε μη-μεταλλευτικά προβλήματα (πετρέλαιο, περιβάλλον, υδρολογία, κλπ.).

BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)
Βέλτιστος Γραμμικός Αμερόληπτος Εκτιμητής

Οι επιθυμητές ιδιότητες του kriging συχνά δίνονται περιληπτικά με το ακρωνύμιο BLUE – Best Linear Unbiased Estimator, δηλαδή βέλτιστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής.

Best
Linear
Unbiased
Estimator

Best (βέλτιστος)

Το kriging είναι ο ‘βέλτιστος’ με την έννοια ότι έχει το ελάχιστο μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα, δηλαδή η αναμενόμενη τετραγωνισμένη διαφορά μεταξύ της εκτίμησης Z_0^* και της πραγματικής τιμή Z_0:

$$E\left[Z_0^* - Z_0\right]^2 \qquad \textbf{Εξίσωση 7-1}$$

είναι η ελάχιστη για όλους τους πιθανούς γραμμικούς εκτιμητές.

Linear (γραμμικός)

Γραμμικοί εκτιμητές είναι εκείνοι που σχηματίζονται με γραμμική ζύγιση των διαθέσιμων δειγμάτων, δηλαδή:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)$$ **Εξίσωση 7-2**

Όπου τα λ_i είναι τα βάρη, και η εκτίμηση Z_0^* είναι ένα ζυγισμένο άθροισμα όλων των δεδομένων τιμών $Z(x_i)$ σε κάθε σημείο x_i. Σημειώστε ότι οι μέθοδοι αντιστρόφου αποστάσεως είναι επίσης γραμμικές, όπως είναι και οι πολυγωνικές μέθοδοι. Στις πολυγωνικές μεθόδους, υπάρχει ένα απλό βάρος (1.0) που εφαρμόζεται μόνο στο δείγμα που πέφτει μέσα στο μπλοκ ή πολύγωνο. Σημειώστε επίσης ότι, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, με τα κριτήρια της ελάχιστης διακύμανσης εκτίμησης, το kriging είναι 'βέλτιστο' όλων των πιθανών γραμμικών εκτιμητών.

Unbiased (αμερόληπτος)

Η συνθήκη αμεροληψίας είναι σημαντική. Καθορίζει ότι το αναμενόμενο σφάλμα:

$$E\left[Z_0^* - Z_0\right]$$

είναι ίσο με μηδέν. Θα συζητήσουμε την ιδιότητα αυτή με περισσότερες λεπτομέρειες αργότερα.

Estimator (εκτιμητής)

Το kriging είναι ένας εκτιμητής. Επειδή δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την πραγματική περιεκτικότητα σε ένα άγνωστο σημείο, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια μέθοδο για να την εκτιμήσουμε.

Επομένως, το kriging είναι ο βέλτιστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής της ποσότητας που εκτιμάται. Το επιτυγχάνει δίνοντας στα δείγματα που οδηγούν στην εκτίμηση, βάρη σχεδιασμένα να δίνουν μια εκτίμηση με το ελάχιστο μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα. Θα δούμε ότι οι ιδιότητες του kriging το κάνουν να υπερέχει έναντι των άλλων μεθόδων που εξετάσαμε.

Πως Λειτουργεί το Kriging

Στο Κεφάλαιο 1 εισάγαμε την αρχική μέθοδο του Krige, και από αυτό το σύστημα απόδοσης βάρους εξελίχθηκε η τεχνική του kriging. Η εξέταση των εξισώσεων του kriging είναι συχνά εμπόδιο για τους γεωλόγους που επιθυμούν να το χρησιμοποιήσουν. Μπορεί να εκτιμούν τα θεωρητικά και πρακτικά πλεονεκτήματα του kriging, αλλά δυσκολεύονται να κατανοήσουν ακριβώς το τι συμβαίνει κατά τον υπολογισμό των βαρών σε ένα πρόγραμμα υπολογιστή που κάνει kriging.

Εάν πάρετε μια αίσθηση για την έννοια των όρων στις εξισώσεις του kriging, του πως το μοντέλο βαριογράμματος επηρεάζει τα βάρη κλπ., θα είστε πιο σίγουροι στη ρύθμιση και εκτέλεση των δικών σας kriging.

Ο στόχος μας εδώ είναι να εισάγουμε και να εξηγήσουμε τις εξισώσεις του kriging με το ελάχιστο των μαθηματικών. Οι αναφορές που δίνονται στο παράρτημα, και ιδιαίτερα οι Journel και Huijbregts (1978) δίνουν όλες τις λεπτομέρειες για το kriging με ολόκληρο το μαθηματικό υπόβαθρο. Ο τελικός μας σκοπός είναι να είμαστε σε θέση να κοιτάξουμε τις εξισώσεις του kriging και να κατανοήσουμε κάθε όρο.

Το Kriging με Απλά Λόγια

Το πρόβλημα μας είναι να πάρουμε μια εκτίμηση σε μια άγνωστη θέση. Θα την πάρουμε χρησιμοποιώντας έναν γραμμικό ζυγισμένο μέσο:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)$$

Το πρόβλημα μας είναι να επιλέξουμε τα βάρη λ_i με τον καλύτερο δυνατό τρόπο για να πετύχουμε τις επιθυμητές ιδιότητες που παρουσιάσαμε στην αρχή του κεφαλαίου.

Στην απλούστερη του μορφή το kriging είναι ένας ζυγισμένος μέσος, όπου τα βάρη επιλέγονται με τον ‘καλύτερο’ δυνατό τρόπο. Όπως και για τη μέθοδο αντιστρόφου αποστάσεως, σε ένα kriging αποδίδουμε βάρη στα δείγματα που βρίσκονται μέσα σε μια καθορισμένη περιοχή ανίχνευσης για να πάρουμε μια γραμμική εκτίμηση. Αυτά είναι τα βάρη του kriging.

Αυτό που κάνει το kriging να διαφέρει από τους άλλους γραμμικούς ζυγισμένους μέσους είναι ότι στηρίζεται σταθερά πάνω στο μοντέλο πιθανοτήτων που εξετάσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια του μαθήματος. Ειδικότερα, το kriging χρησιμοποιεί το μοντέλο βαριογράμματος ως συνάρτηση βάρους. Εξαιτίας αυτού, τα βάρη του kriging αποδίδονται κατά τρόπο που αντικατοπτρίζει τον χωρικό συσχετισμό των ίδιων των περιεκτικοτήτων. Αυτό είναι ένα μεγάλο βήμα εμπρός από τη χρήση αυθαίρετων συναρτήσεων βάρους που έχουν λίγη σχέση με τη φύση της κατανομής της περιεκτικότητας.

Τα Πλεονεκτήματα Ενός Πλαισίου Πιθανοτήτων

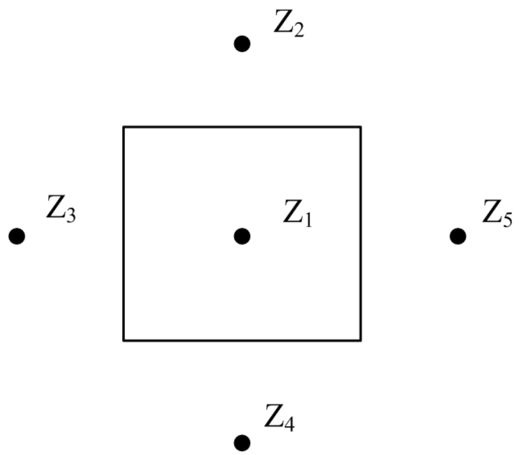
Χρησιμοποιώντας το πλαίσιο των τυχαίων συναρτήσεων και καθορίζοντας ένα μοντέλο βαριογράμματος μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη διακύμανση του μέσου σφάλματος που θα κάνουμε εκτιμώντας την περιεκτικότητα ενός μπλοκ χρησιμοποιώντας δεδομένα εντός μιας δοσμένης χωρικής (ή γεωμετρικής) διάταξης.

Είναι η δυνατότητα να υπολογίσουμε το μέσο σφάλμα που μας δίνει την ευκαιρία να το ελαχιστοποιήσουμε. Μόνο μια προσέγγιση πιθανοτήτων μπορεί να μας το επιτρέψει. Γενικά, το kriging είναι ένας γραμμικός ζυγισμένος μέσος που χρησιμοποιεί το βαριόγραμμα ως συνάρτηση βάρους. Το kriging τυποποιεί τα βάρη στο πλαίσιο των μοντέλων τυχαίων συναρτήσεων και αυτό είναι που μας επιτρέπει να πάρουμε εκτιμήσεις ελάχιστης διακύμανσης.

Εξισώσεις του Kriging

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου θέλουμε να εκτιμήσουμε την περιεκτικότητα ενός μπλοκ χρησιμοποιώντας τα γύρω δεδομένα (όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1). Η εκτίμηση μας θα είναι ένας γραμμικός ζυγισμένος μέσος, ή γραμμικός συνδυασμός, των διαθέσιμων δεδομένων:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)$$



Σχήμα 7.1: Εκτίμηση μπλοκ από πλήθος δεδομένων.

Σημειώστε ότι εδώ οι τιμές z(x) είναι τιμές δεδομένων (με μικρά γράμματα). Η έκφραση λεει απλά ότι: ‘η εκτίμηση Z_0^* είναι ίση με το άθροισμα κάθε δεδομένης τιμής $z(x_i)$ επί ενός βάρους λ_i’. Έτσι, για κάθε ένα από τα δείγματα που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση, δίνουμε ένα βάρος. Υπάρχουν *N* δείγματα, και επομένως *N* βάρη:

$$\lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N$$

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα αυτό σε όρους ενός μοντέλου πιθανοτήτων ή ενός στατιστικού μοντέλου. Έτσι θα αποδώσουμε τις εκτιμήσεις και τα δεδομένα ως τυχαίες συναρτήσεις:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)$$

Επιλέγοντας τα ‘Βέλτιστα’ Βάρη

Θέλουμε τώρα να καθορίσουμε τα βάρη λ_i ώστε η Z_0^* να είναι:

1. Αμερόληπτη: $E\left[Z_0^* - Z_0\right]$

2. να έχει το ελάχιστο μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα, δηλαδή $E\left[Z_0^* - Z_0\right]^2$ να είναι ελάχιστο.

Όταν ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη, το μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα είναι επίσης η διακύμανση, δηλαδή είναι η τετραγωνισμένη απόκλιση από τον μέσο. Έτσι, από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε στη *διακύμανση σφάλματος* ή *διακύμανση kriging* αντί για το μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα.

Η Συνθήκη Αμεροληψίας

Η συνθήκη αμεροληψίας συνεπάγεται ότι:

$$E\left[Z_0^* - Z_0\right] = 0$$
$$E\left[\left\{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)\right\} - Z_0\right] = 0$$

Εξίσωση 7-3

Εάν η *Z(x)* είναι στάσιμη, η προσδοκία για το *Z(x)* είναι ίση με τον μέσο:

$$E[Z(x_i)] = m$$

Εξίσωση 7-4

Και επίσης η προσδοκία για την πραγματική περιεκτικότητα Z_0 είναι ίση με τον μέσο:

$$E[Z_0] = m$$

Εξίσωση 7-5

Έτσι, εάν η *Z(x)* είναι στάσιμη οι αναμενόμενες τιμές για την πραγματική τιμή και κάθε τιμή δοσμένου δείγματος είναι ίσες και οι δύο με τον μέσο, και μπορούμε να γράψουμε τη συνθήκη αμεροληψίας ως εξής:

$$E\left[\left\{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)\right\} - Z_0\right] = 0$$
$$E\left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)\right] - E\left[Z_0\right] = 0$$
$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot m - m = 0$$

Εξίσωση 7-6

Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε την τελευταία έκφραση λαμβάνοντας την τιμή *m* ως κοινό παράγοντα:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot m - m = 0$$

$$m\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i - 1\right) = 0$$

Εξίσωση 7-7

Διαιρώντας και τις δυο πλευρές δια *m*...

$$m\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i - 1\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i - 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$$

Εξίσωση 7-8

Ώστε, η συνθήκη αμεροληψίας ικανοποιείται όταν βεβαιώνουμε ότι το άθροισμα των βαρών ισούται με 1.

Αυτό είναι ένα λογικό αποτέλεσμα, και οι περισσότερες μέθοδοι εκτίμησης στην πραγματικότητα ικανοποιούν αυτήν τη συνθήκη. Για παράδειγμα, όπως κάθε γραμμικός συνδυασμός, ο εκτιμητής αντιστρόφου αποστάσεως μπορεί να γραφθεί ως εξής:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot Z(x_i)$$

Εξίσωση 7-9

όπου το λ_i καθορίζεται ως εξής:

$$\lambda_i = \frac{\frac{1}{d_i^{\alpha}}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{d_i^{\alpha}}}$$

Εξίσωση 7-10

όπου *d* είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου εκτίμησης z_0 και δεδομένου $z(x_i)$. Η απόσταση αυτή υψώνεται σε κάποια δύναμη *α*. Στην πράξη, τα βάρη αυτά ρυθμίζονται ώστε να δίνουν άθροισμα 1.0.

Η Διακύμανση Σφάλματος

Η διακύμανση σφάλματος είναι απλά η διακύμανση των σφαλμάτων:

$$\left[Z_0^* - Z_0\right]$$

Η διακύμανση σφάλματος στη στάσιμη περίπτωση είναι η αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου του σφάλματος:

$$E\left[Z_0^* - Z_0\right]^2 = \mathrm{Var}\left[Z_0^* - Z_0\right] \qquad \textbf{Εξίσωση 7-11}$$

Η διακύμανση αυτή είναι η διακύμανση kriging εφόσον η εκτίμηση γίνεται με το kriging. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε αυτήν τη διακύμανση.

Όροι στις Εξισώσεις του Kriging

Η διακύμανση σφάλματος μπορεί μαθηματικά να αποδοθεί σε όρους της συνάρτησης βαριογράμματος. Θα ακολουθήσουμε όλους τους όρους στην παρακάτω εξίσωση για να τους ξεκαθαρίσουμε (δείτε επίσης το Σχήμα 7.2):

$$\begin{aligned} E\left[Z_0^* - Z_0\right]^2 &= \mathrm{Var}\left[Z_0^* - Z_0\right] \\ &= 2\sum \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \sum\sum \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) - \bar{\gamma}(V, V) \end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 7-12}$$

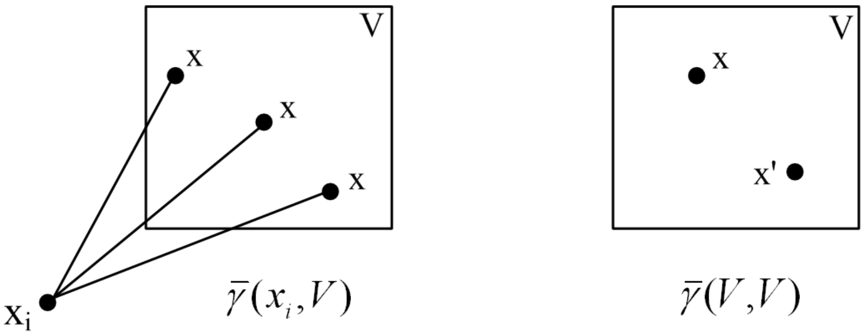
όπου $\bar{\gamma}(x_i, V)$ είναι η μέση τιμή του βαριογράμματος υπολογισμένου μεταξύ x_i και του όγκου *V*, δηλαδή

$$\bar{\gamma}(x_i, V) = \frac{1}{V}\int_V \gamma(x_i - x)dx \qquad \textbf{Εξίσωση 7-13}$$

$\gamma(x_i, x_j)$ είναι η τιμή του βαριογράμματος μεταξύ των σημείων x_i και x_j δηλαδή μεταξύ των δειγμάτων.
$\bar{\gamma}(V, V)$ είναι η μέση τιμή του βαριογράμματος μεταξύ οποιονδήποτε δυο σημείων *x* και *x'* που κινούνται ανεξάρτητα μέσα στον όγκο *V*, δηλαδή:

$$\bar{\gamma}(V, V) = \frac{1}{V^2}\iint \gamma(x - x')dxdx' = F(V) \qquad \textbf{Εξίσωση 7-14}$$

Αυτή είναι η διακύμανση διασποράς των σημείων μέσα στον όγκο *V*.



Σχήμα 7.2: Διακυμάνσεις επέκτασης και διασποράς στις εξισώσεις kriging.

Θυμηθείτε ότι στόχος μας είναι η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης της εκτίμησης υπό τον περιορισμό ότι το άθροισμα των βαρών να ισούται με 1.0. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα n+1 εξισώσεων με n αγνώστους. Υπάρχουν n εξισώσεις κάθε μια με ένα από τα n βάρη $\lambda_i = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N$. Η επιπρόσθετη εξίσωση είναι η συνθήκη αμεροληψίας: το άθροισμα των βαρών ισούται με τη μονάδα.

Η Παράμετρος Lagrange

Η τεχνική των *παραμέτρων Lagrange* (ή *πολλαπλασιαστές Lagrange*) ταιριάζει στη λύση αυτού του προβλήματος. Η τεχνική αυτή είναι μια μαθηματική διαδικασία για τη μετατροπή ενός περιορισμένου προβλήματος ελαχιστοποίησης σε ένα μη περιορισμένο. Ουσιαστικά, εισάγεται άλλος ένας άγνωστος στην εξίσωση μας (η παράμετρος Lagrange).

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε κάποια συνάρτηση ως προς τα λ_i – χρειάζεται να θέσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τα λ_i να είναι μηδέν. Εισάγουμε την παράμετρο Lagrange ως εξής:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sigma_e^2 - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i - 1\right)\\ &= Var(z_0^* - z_0) - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i - 1\right)\end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 7-15}$$

Σημειώστε ότι η συνάρτηση φ είναι απλά η διακύμανση εκτίμησης με την προσθήκη του όρου:

$$-2\mu\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i - 1\right) \qquad \text{(i)}$$

Εφόσον θέσαμε τον όρο:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i - 1 = 0$$ **Εξίσωση 7-16**

ο όρος (i) ισούται με μηδέν. Έτσι, προσθέτοντας τον όρο αυτό, δεν αλλάζουμε την εξίσωση μας, απλά τη ξαναγράφουμε για να κάνουμε πιο εύκολη την ελαχιστοποίηση. Θέτουμε τις μερικές παραγώγους τις εξίσωσης 7-15:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i} \text{ και } \frac{\partial \mu}{\partial \lambda_i}$$

να είναι μηδέν για να λάβουμε εκείνα τα *λ* που ικανοποιούν τα κριτήρια ελάχιστης διακύμανσης. Λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, γνωστό ως *κανονικό σύστημα kriging*:

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_i \gamma(x_i - x_j) + \mu = \bar{\gamma}(x_i, V) \quad i = 1,2,...,N$$ **Εξίσωση 7-17**

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_i = 1$$

Η ελάχιστη τιμή της διακύμανσης (που ονομάζεται *διακύμανση kriging*) δίνεται ως εξής:

$$\sigma_{OK}^2 = Var(z_0^* - z_0) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \bar{\gamma}(V, V) + \mu$$ **Εξίσωση 7-18**

Σημειώστε ότι, όταν το μοντέλο βαριογράμματος είναι ένα καθαρό φαινόμενο ψήγματος C_o έχουμε:

$$\lambda_i = \frac{1}{N}$$ **Εξίσωση 7-19**

δηλαδή κάθε δείγμα παίρνει ένα ίσο βάρος, ανεξάρτητα από τη θέση του στο χώρο ως προς το μπλοκ που εκτιμάμε. Αυτό είναι λογικό, γιατί ένα καθαρό φαινόμενο ψήγματος δείχνει ανυπαρξία χωρικού συσχετισμού, συνεπώς, τα δείγματα που είναι κοντά στο μπλοκ (ή μέσα του) δεν μας λένε τίποτα παραπάνω για το μπλοκ από τα δείγματα που είναι μακριά.

Στην περίπτωση όπου ο *V* είναι ένα σημείο, η διακύμανση του σημειακού μπλοκ ανάγεται στη διακύμανση σημείου-σημείου:

$$\bar{\gamma}(x_i, V) = \gamma(x_i - x_0) \qquad \textbf{Εξίσωση 7-20}$$

και

$$\bar{\gamma}(V, V) = \gamma(0) = 0 \qquad \textbf{Εξίσωση 7-21}$$

Το σύστημα kriging συχνά αναπαρίσταται με μορφή πινάκων:

$$\begin{array}{ccc} A & \cdot X= & B \\ \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{1N} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{2N} & 1 \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \gamma_{NN} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot & \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_N \\ \mu \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(x_1, V) \\ \bar{\gamma}(x_2, V) \\ \bar{\gamma}(x_N, V) \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \textbf{Εξίσωση 7-22}$$

Στην παραπάνω εξίσωση:

- A είναι ένα πίνακας των συνδιακυμάνσεων μεταξύ δειγμάτων (σε όρους βαριογράμματος).
- X είναι ένας πίνακας που περιέχει τα βάρη που θέλουμε να υπολογίσουμε.
- B είναι ένας πίνακας που περιέχει τις συνδιακυμάνσεις δείγματος-μπλοκ (πάλι σε όρους βαριογράμματος).

Εάν το *γ* είναι μια αποδεκτή συνάρτηση βαριογράμματος, τότε η λύση είναι εύκολη:

AX = B
X = B/A

Ιδιότητες του Kriging

Ξεκινήσαμε το κεφάλαιο αυτό εξετάζοντας τις επιθυμητές ιδιότητες ενός εκτιμητή. Σημειώνουμε ότι το kriging λαμβάνει υπόψη τα παρακάτω στοιχεία:

1. Τις σχετικές θέσεις του εκτιμώμενου μπλοκ και του δείγματος στην περίπτωση εκτίμησης ενός σημείου.
2. Τις αποστάσεις μεταξύ δειγμάτων.
3. Τη δομή της χωρικής μεταβλητότητας σχετικής με την υπό εξέταση μεταλλοφορία. Τα βάρη του kriging είναι προσαρμοσμένα σε αυτήν τη μοντελοποιημένη χωρική συνέχεια.

Ακριβής Παρεμβολή

Αντίθετα με κάποιους εκτιμητές, για παράδειγμα τις επιφάνειες τάσεων, ή την απλή γραμμική παλινδρόμηση, το kriging είναι ένας *ακριβής εκτιμητής*. Αυτό σημαίνει ότι όταν εκτιμούμε σημειακές τιμές, το kriging επαναφέρει στα δεδομένα σημεία, τη μετρημένη τιμή. Αυτή είναι μια ιδιότητα του kriging, και όχι μια επιπρόσθετη ρύθμιση. Η ιδιότητα αυτή μπορεί εύκολα να ελεγχθεί στο σύστημα kriging. Εάν $x_0 = x_i$ τότε η λύση είναι:

$$\lambda_i = 1$$

και $\lambda_j = 0$ για $j \neq 0$

Μάλιστα, αυτό αντιστοιχεί με τη λογική άποψη του πως ένας καλός εκτιμητής θα πρέπει να συμπεριφέρεται. Μπορούμε να πάμε πίσω στις πρώτες αρχές, και να εξετάσουμε το τετραγωνισμένο σφάλμα που προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε:

$$E\left[Z^*(x_0) - Z\ (x_0)\right]^2$$ **Εξίσωση 7-23**

Το σφάλμα αυτό ελαχιστοποιείται προφανώς όταν:

$$Z^*(x_0) = Z\ (x_0)$$ **Εξίσωση 7-24**

και το ελάχιστο αυτό είναι προφανώς μηδέν. Αυτή είναι μια ιδιότητα του kriging που το κάνει ιδιαίτερα κατάλληλο για εφαρμογές ισοκαμπύλων, διότι τα δεδομένα σημεία τιμώνται επακριβώς.

Μοναδική Λύση

Το σύστημα kriging πάντα έχει μια μοναδική λύση, δεδομένου ότι το μοντέλο βαριογράμματος που χρησιμοποιείται είναι θετικά ορισμένο. Αυτός είναι και ένας ακόμα λόγος γιατί μόνο οι αποδεκτές συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοντέλα βαριογράμματος.

Τα Συστήματα Kriging Δεν Εξαρτώνται Από τις Τιμές των Δεδομένων

Τα βάρη του kriging εξαρτώνται από τα δεδομένα με την έννοια ότι το μοντέλο βαριογράμματος που επιλέγουμε είναι στενά συνδεδεμένο με το ιστόγραμμα και τη χωρική συνέχεια των ίδιων των δειγμάτων, όμως, οι εξισώσεις του kriging δεν κάνουν κάποια αναφορά στα ίδια τα δεδομένα. Αυτό σημαίνει ότι το σετ των βαρών που λαμβάνουμε για μια δοσμένη γεωμετρία δειγματοληψίας και ένα συγκεκριμένο βαριόγραμμα είναι τα ίδια, ανεξάρτητα από τις συγκεκριμένες περιεκτικότητες των δειγμάτων.

Για παράδειγμα, εάν εξετάσουμε μια ζώνη με ένα ορισμένο μοντέλο βαριογράμματος και ένα κανονικό ορθογωνικό πλέγμα δειγματοληψίας, θα υπάρχει ένα σετ βαρών kriging να λάβουμε (καθώς κάθε μπλοκ θα ενημερώνεται από ακριβώς ίδια τοποθετημένα δείγματα, με μια σχετική έννοια). Αυτή η ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αυξηθεί δραματικά η αποτελεσματικότητα και ταχύτητα του kriging ελέγχου περιεκτικότητας.

Εξαιτίας αυτής της ιδιότητας, είναι σημαντικό να είμαστε προσεκτικοί στον καθορισμό του βαριογράμματος και πρέπει να έχουμε αρκετά δεδομένα για να είμαστε σίγουροι για το μοντέλο που επιλέγουμε.

Συνδυασμός Εκτιμήσεων Kriging

Θεωρητικά, εάν διαιρέσουμε ένα μπλοκ *V* σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό σημείων (ας πούμε 100 ή περισσότερα) και εκτελέσουμε ένα σημειακό kriging στο καθένα από αυτά, ο μέσος αυτών των σημειακών εκτιμήσεων ισούται με τη εκτίμηση του μπλοκ. Όμως, αυτή η διαδικασία είναι πολύ αναποτελεσματική και δεν χρησιμοποιείται ποτέ στην πράξη. Η χρήση των συνδιακυμάνσεων σημείων-μπλοκ (μέσω του μοντέλου βαριογράμματος) μας επιτρέπει να πάρουμε πολύ πιο αποτελεσματικά τις εκτιμήσεις kriging των μπλοκ.

Επιρροή του Φαινόμενου Ψήγματος στα Βάρη του Kriging

Στο κεφάλαιο της βαριογραφίας, δώσαμε έμφαση στο ότι η συμπεριφορά μικρής κλίμακας είναι κρίσιμη για το kriging. Ιδιαίτερα, το φαινόμενο ψήγματος έχει μια δυνατή επιρροή στα βάρη του kriging:

Φαινόμενο Σκίασης

Εάν έχουμε ένα μικρό φαινόμενο ψήγματος, δηλαδή πολύ συνεχές βαριόγραμμα, τότε το ζύγισμα θα κλίνει πολύ προς το μπλοκ που εκτιμάται και τα γειτονικά του δείγματα. Αυτό ονομάζεται *φαινόμενο σκίασης*, γιατί τα κοντινά δείγματα θεωρείται ότι σκιάζουν τα πιο μακρινά από το να λάβουν σημαντικά βάρη όταν υπάρχει μικρό φαινόμενο ψήγματος. Και πάλι αυτό είναι λογικό, γιατί θα θέλαμε ο εκτιμητής μας να δίνει στα κοντινά δείγματα την πλειοψηφία του βάρους στην περίπτωση ιδιαίτερης χωρικής συνέχειας. Ένα δυνατό φαινόμενο σκίασης σημαίνει ότι το kriging δεν είναι πολύ ομαλό.

Υψηλό Φαινόμενο Ψήγματος

Εάν έχουμε ένα πιο ασυνεχές μοντέλο βαριογράμματος, για παράδειγμα σε μερικά κοιτάσματα μετάλλων, ολοένα και περισσότερα μακρινά δείγματα θα λαμβάνουν μη-μηδενικά βάρη. Στην ακραία περίπτωση του καθαρού φαινόμενου ψήγματος, όλα τα δείγματα λαμβάνουν ίσο βάρος.

Μάλιστα, η περίπτωση καθαρού φαινόμενου ψήγματος υπονοεί ότι δεν μπορεί να γίνει τοπική εκτίμηση: η καλύτερη εκτίμηση ενός μπλοκ είναι η μέση περιεκτικότητα του κοιτάσματος. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει πλήρης απουσία φαινόμενου σκίασης και η εξομάλυνση είναι πλήρης.

Απλό Kriging

Το kriging που εισάγαμε στις προηγούμενες σελίδες είναι το κανονικό kriging (ordinary kriging, OK). Αυτό είναι το kriging που υπάρχει στα περισσότερα μεταλλευτικά πακέτα. Το σύστημα μπορεί να ληφθεί υπό αυστηρά στάσιμες συνθήκες για να δώσει το *απλό kriging* (simple kriging, SK). Εφόσον αυστηρή στασιμότητα υπονοεί ότι ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$Z(x) - m = 0 \qquad \textbf{Εξίσωση 7-25}$$

Όπου *m* είναι ο μέσος, δεν χρειάζεται να θέσουμε:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$$ **Εξίσωση 7-26**

ως προϋπόθεση. Το SK είναι πολύ χρήσιμο όταν καθορίζεται η περιοχή ανίχνευσης του kriging (δηλαδή η περιοχή στην οποία θα περιορίσουμε την ανίχνευση δειγμάτων). Στο SK καθορίζουμε ένα βάρος που δίνεται στο μέσο λ_m ώστε:

$$\lambda_m = 1 - \sum \lambda_i$$ **Εξίσωση 7-27**

Όσο πιο μεγάλο είναι το λ_m, τόσο πιο αδύναμο είναι το φαινόμενο σκίασης. Συνεπώς, επιλέγουμε μεγαλύτερη περιοχή ανίχνευσης καθώς αυξάνει το λ_m εφόσον όλα τα άλλα παραμένουν σταθερά (Rivoirard, 1987γ). Οι διάφορες τεχνικές του kriging αναλύονται στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

Πρακτική Kriging

Τα βήματα του kriging είναι τα εξής:

1. Αρχική ανάλυση και καθάρισμα των δεδομένων.
2. Ορισμός ζωνών ενδιαφέροντος.
3. Μετασχηματισμός δεδομένων (εφόσον απαιτείται).
4. Δομική ανάλυση για τη λήψη ενός μοντέλου βαριογράμματος.
5. Καθορισμός του διαστήματος πλέγματος/διαστάσεων μπλοκ, ορίων.
6. Καθορισμός της περιοχής ανίχνευσης του kriging.
7. Εκτέλεση του kriging.
8. Ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Πως να Εξετάσετε τα Αποτελέσματα του Kriging

Υπάρχουν πολλά σημαντικά βήματα όταν εξετάζουμε τα αποτελέσματα του kriging (τα περισσότερα από αυτά αποτελούν μια σωστή πρακτική ανεξάρτητα από το ποιος εκτιμητής χρησιμοποιείται):

Κάνουμε χάρτες των εκτιμήσεων. Ανά επίπεδο και ανά τομή. Πρέπει να είναι στην ίδια κλίμακα με τα δείγματα για να επιτραπεί ο έλεγχος των εκτιμήσεων. Η διακύμανση του kriging πρέπει επίσης να δίνεται μαζί με την εκτίμηση, συνήθως χρωματικά. Μερικά συγκεκριμένα όρια για τα χρώματα είναι καλύτερο από πολλά χρώματα που μας μπερδεύουν.

Ελέγχουμε τη θέση πολύ υψηλών και πολύ χαμηλών εκτιμήσεων σε σχέση με τα δεδομένα των δειγμάτων. Το βήμα αυτό είναι σημαντικό, γιατί καμιά φορά μεταφέρονται μεγάλα λάθη ακόμα και σε αυτό το προχωρημένο στάδιο.

Εξετάζουμε προσεκτικά τις εκτιμήσεις κοντά στα όρια του κοιτάσματος. Είναι λογικές οι εκτιμήσεις; Ακολουθήθηκαν τα γεωλογικά όρια;

Εξετάζουμε τις εκτιμήσεις βάσει της γεωλογίας. Μεταφέρθηκαν τα σημαντικότερα γεωλογικά στοιχεία στις εκτιμήσεις (για παράδειγμα η ανισοτροπία);

Εξετάζουμε τη διακύμανση kriging σε σχέση με το διάστημα δειγματοληψίας. Η διακύμανση του kriging είναι ένας δείκτης του διαστήματος δειγματοληψίας. Η υψηλή διακύμανση θα συνδέεται με περιοχές με λίγα δείγματα και αντίστροφα.
Εξετάζουμε τις εκτιμήσεις για περιοχές με λίγα ή καθόλου δείγματα. Είναι λογικές οι εκτιμήσεις;

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Ποια είναι τα βήματα στην εξέταση των αποτελεσμάτων του kriging;
2. Ποιες ιδιότητες καθιστούν το kriging κατάλληλο εκτιμητή;
3. Ποια είναι τα βήματα εφαρμογής του kriging;
4. Εξαρτώνται τα συστήματα εξισώσεων kriging από τις τιμές των δειγμάτων;
5. Τι σημαίνει για έναν εκτιμητή να είναι ακριβής;
6. Ποια στοιχεία λαμβάνει υπόψη το kriging κατά την εκτίμηση;

8. ΜΟΡΦΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ KRIGING

Γενικά

Το kriging είναι μια γεωστατιστική διαδικασία κατά την οποία δίνονται βάρη σε τιμές δειγμάτων εντός μιας δοσμένης περιοχής επιλογής ή όγκου. Τα βάρη αυτά ονομάζονται και συντελεστές kriging (K_i) και οι τιμές τους μεταβάλλονται με την απόσταση από το σημείο ή το μπλοκ εκτίμησης. Εξαρτώνται επίσης από τη διάταξη και την πυκνότητα της δειγματοληψίας και τον προσανατολισμό του διανύσματος που σχηματίζεται μεταξύ του σημείου εκτίμησης και του δείγματος. Στην περίπτωση του μπλοκ kriging, εξαρτώνται επίσης και από το μέγεθος των μπλοκ. Βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν αυτούς τους συντελεστές είναι οι παράμετροι C_0 και C του βαριογράμματος καθώς και ο βαθμός ανισοτροπίας στις διάφορες διευθύνσεις. Έτσι οι παράμετροι αυτοί χαρακτηρίζουν τη χωρική μεταβολή της εξεταζόμενης χωρομεταβλητής. Η εφαρμογή αυτών των παραγόντων κάνει το kriging να ξεχωρίζει από άλλες τεχνικές εξομάλυνσης, όπως η μέθοδος αντιστρόφου αποστάσεως, οι οποίες αγνοούν εντελώς τη φύση της μεταλλοφορίας.

Η μέθοδος kriging έχει πλέον καθιερωθεί στο χώρο της μεταλλευτικής και η συνεχής εφαρμογή της σε διάφορα κοιτάσματα με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά οδήγησε στην ανάπτυξη προηγμένων μορφών της που δίνουν καλύτερα και πιο αμερόληπτα αποτελέσματα κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Οι μορφές αυτές και η εφαρμογή τους εξετάζονται σε αυτό το κεφάλαιο.

Σημειακό Kriging

Το σημειακό kriging (Point Kriging) είναι μια διαδικασία κατά την οποία εκτιμάται η τιμή σημείων χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους του επιλεγμένου βαριογράμματος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εκτίμηση αποθεμάτων, όπως για παράδειγμα για τον καθορισμό της περιεκτικότητας μέρους μιας βαθμίδας που προετοιμάζεται για εξόρυξη με εκρηκτικά, και επίσης ως μέσο ελέγχου της δυνατότητας των παραμέτρων εκτίμησης για την αναπαραγωγή των αρχικών (παρατηρούμενων) τιμών της βάσης δεδομένων.

Όταν το σημειακό kriging χρησιμοποιείται για τη δεύτερη περίπτωση η διαδικασία αναφέρεται ως δια-επικύρωση (Jack-knifing). Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, χρησιμοποιείται για τη λήψη των καλύτερων παραμέτρων βαριογράμματος κατά την προσαρμογή μοντέλου στο πειραματικό βαριόγραμμα. Χρησιμοποιώντας την πρώτη εκτίμηση αυτών των παραμέτρων και αφαιρώντας την παρατηρούμενη τιμή ενός σημείου, γίνεται η εκτίμηση του με kriging όλων των γειτονικών τιμών που πέφτουν εντός μιας καθορισμένης περιοχής ανίχνευσης (κυκλικής ή ελλειπτικής) ή όγκου (σφαιρικού ή ελλειψοειδούς) γύρω από το σημείο. Οι άξονες της περιοχής (ή του όγκου) ανίχνευσης θα πρέπει να είναι κάτι λιγότερο από το εύρος σε κάθε διεύθυνση. Συνήθως είναι καλό να υπάρχουν τουλάχιστο 5 με 6 δείγματα, ενώ ο βέλτιστος αριθμός είναι συνήθως γύρω στα 15.

Μετά την εισαγωγή των παραμέτρων του βαριογράμματος στο πρόγραμμα εκτίμησης, κάθε τιμή δείγματος Z_i αφαιρείται με τη σειρά και γίνεται εκτίμηση του σημείου με kriging. Για κάθε σημείο υπολογίζονται οι παρακάτω παράμετροι:

Α) Μέσο μαθηματικό σφάλμα $(\sum_{i=1}^{N}(Z_i - Z_i^*))/N$ όπου Z_i είναι η πραγματική τιμή σε κάθε σημείο και N είναι το πλήθος των σημείων. Η παράμετρος αυτή λαμβάνει υπόψη το πρόσημο της διαφοράς.

Β) Μέσο απόλυτο σφάλμα $(\sum_{i=1}^{N}|Z_i - Z_i^*|)/N$. Είναι ο μέσος των διαφορών αλλά αγνοώντας το πρόσημο.

Γ) Μέση διακύμανση kriging $\sigma_K^2 = (\sum_{i=1}^{N}\sigma_{k_i}^2)/N$.

Δ) Μέσο τετραγωνισμένο σφάλμα εκτίμησης $\sigma_E^2 = (\sum_{i=1}^{N}(Z_i - Z_i^*)^2)/N$

Ε) Πλήθος σημείων που χρησιμοποιούνται στο σημειακό kriging N.

ΣΤ) Λόγος του μέσου τετραγωνισμένου σφάλματος προς τη μέση διακύμανση kriging σ_E^2/σ_K^2.

Εάν το μοντέλο είναι καλή προσέγγιση του θεωρητικού βαριογράμματος τότε:

1. η τιμή του μέσου μαθηματικού σφάλματος πρέπει να τείνει στο μηδέν και να μην είναι μεγαλύτερο από 1% των τιμών Z_i για συνολική αμεροληψία,
2. το μέσο απόλυτο σφάλμα θα είναι μεγαλύτερο από το μέσο μαθηματικό σφάλμα και όσο το δυνατό μικρότερο,
3. ο λόγος σ_E^2/σ_K^2 πρέπει να πλησιάζει στη μονάδα, και
4. το N πρέπει να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερο.

Όπου δεν ικανοποιείται η συνθήκη 3, αυτό μπορεί να οφείλεται στην παρουσία ακραίων τιμών ή ανώμαλα υψηλών ή χαμηλών τιμών στο σετ δεδομένων κάτι που θα οδηγήσει σε ισχυρή μεροληψία των τετραγωνισμένων διαφορών μεταξύ αυτών και γειτονικών σημείων. Εφόσον οι τιμές αυτές απομακρυνθούν ο λόγος σ_E^2/σ_K^2 θα πλησιάσει και πάλι τη μονάδα.

Μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να κατασκευαστεί το ιστόγραμμα των σφαλμάτων εκτίμησης που θα πρέπει να δώσει μια συμμετρική κατανομή με μέσο κοντά στο μηδέν, υψηλή κύρτωση και χαμηλό συντελεστή μεταβλητότητας. Το διάγραμμα διασποράς των σφαλμάτων έναντι των εκτιμήσεων σε κάθε σημείο Z_i^* είναι επίσης σημαντικό καθώς δείχνει κατά πόσο το νέφος διασποράς είναι συμμετρικό ως προς μια οριζόντια γραμμή που περνά από την τιμή σφάλματος μηδέν. Για κάθε εύρος εκτιμήσεων (από χαμηλές προς υψηλές) το άθροισμα των υπερ-εκτιμήσεων (αρνητικά σφάλματα) είναι σχεδόν ίσο του αθροίσματος των υπο-εκτιμήσεων (θετικά σφάλματα). Έτσι ικανοποιείται η ανάγκη για δεσμευμένη αμεροληψία.

Τέλος, το διάγραμμα διασποράς Z_i έναντι της Z_i^* θα πρέπει να δείξει μια καλή προσέγγιση της γραμμής 45° που περνά από την αρχή των αξόνων ενώ ο συντελεστής συσχετισμού θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στη μονάδα.

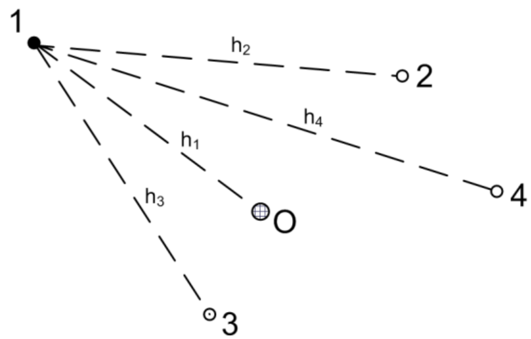
Μπορούν να γίνουν προσαρμογές στις παραμέτρους του βαριογράμματος και της περιοχής ανίχνευσης για τη βελτιστοποίηση αυτών των κριτηρίων του kriging. Εφόσον γίνει αυτό οι τιμές αυτές των παραμέτρων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σημειακό ή μπλοκ kriging σε μια διαδικασία εκτίμησης αποθεμάτων.

Μαθηματική Βάση του Σημειακού Kriging

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε τη μαθηματική βάση του σημειακού kriging στηριζόμενοι στην περίπτωση εκτίμησης σημείου όπως αυτό δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο ‘Ο’ πρόκειται να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας τα τέσσερα γειτονικά σημεία. Έτσι η πρώτη από τις εξισώσεις του kriging που θα πρέπει να επιλυθούν για τη λήψη των συντελεστών K_i είναι η εξής:

$$K_1\sigma_{1,1} + K_2\sigma_{1,2} + K_3\sigma_{1,3} + K_4\sigma_{1,4} + \mu = \sigma_{O,1} \qquad \textbf{Εξίσωση 8-1}$$

όπου $\sigma_{1,1}$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ δείγματος 1 και του εαυτού του (C_0), $\sigma_{1,2}$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ δείγματος 1 και 2, κλπ. μ είναι ο συντελεστής Lagrange και $\sigma_{O,1}$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ του σημείου εκτίμησης και του δείγματος 1.



Σχήμα 8.1: Εκτίμηση σημείου με σημειακό kriging και χρήση τεσσάρων γειτονικών δειγμάτων.

Μπορούμε να γράψουμε άλλες τρεις εξισώσεις για τα δείγματα 2, 3, 4 όπως κάναμε και για το δείγμα 1. Η (n+1)^{η} εξίσωση (η πέμπτη στην περίπτωση μας) είναι επομένως:

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 1 \qquad \textbf{Εξίσωση 8-2}$$

Οι συνδιακυμάνσεις των εξισώσεων του kriging μπορούν να αντικατασταθούν από τις τιμές του μοντέλου του βαριογράμματος που έχουμε προσαρμόσει στο πειραματικό βαριόγραμμα. Έτσι το πλήρες σετ εξισώσεων του kriging είναι το εξής:

$$\begin{aligned}
&K_1\gamma_{1,1}+K_2\gamma_{1,2}+K_3\gamma_{1,3}+K_4\gamma_{1,4}+\mu=\gamma_{O,1}\\
&K_1\gamma_{2,1}+K_2\gamma_{2,2}+K_3\gamma_{2,3}+K_4\gamma_{2,4}+\mu=\gamma_{O,2}\\
&K_1\gamma_{3,1}+K_2\gamma_{3,2}+K_3\gamma_{3,3}+K_4\gamma_{3,4}+\mu=\gamma_{O,3}\\
&K_1\gamma_{4,1}+K_2\gamma_{4,2}+K_3\gamma_{4,3}+K_4\gamma_{4,4}+\mu=\gamma_{O,4}\\
&K_1+K_2+K_3+K_4=1
\end{aligned}$$

Εξίσωση 8-3

Οι εξισώσεις αυτές μετατρέπονται σε πίνακα για επίλυση με κάποιο κατάλληλο πρόγραμμα:

$$\begin{matrix}
\gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,3} & \gamma_{1,4} & 1\\
\gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \gamma_{2,3} & \gamma_{2,4} & 1\\
\gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & \gamma_{3,3} & \gamma_{3,4} & 1\\
\gamma_{4,1} & \gamma_{4,2} & \gamma_{4,3} & \gamma_{4,4} & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{matrix}
\;\mathbf{x}\;
\begin{matrix} K_1\\ K_2\\ K_3\\ K_4\\ \mu \end{matrix}
=
\begin{matrix} \gamma_{O,1}\\ \gamma_{O,2}\\ \gamma_{O,3}\\ \gamma_{O,4}\\ 1 \end{matrix}$$

Εξίσωση 8-4

Εφόσον υπολογιστούν οι τιμές των K_i λύνοντας αυτές τις εξισώσεις, η τιμή στο σημείο ‘Ο’ καθορίζεται αθροίζοντας τα προϊόντα κάθε τιμής δείγματος με το συντελεστή βάρους τους. Ο Barnes (1991) παρουσιάζει ένα χρήσιμο παράδειγμα εφαρμογής σημειακού kriging για την περίπτωση φλεβικού κοιτάσματος αργύρου. Η διακύμανση εκτίμησης kriging, δηλαδή το σφάλμα που συμβαίνει κατά την εκτίμηση σημειακού δείγματος, υπολογίζεται με τη βασική εξίσωση:

$$\sigma_K^2=\sigma_{0,0}^2-\sum K_i x\sigma_{0,i}+\mu$$

Εξίσωση 8-5

Παράδειγμα Εφαρμογής Σημειακού Kriging

Εάν πρόκειται να εκτιμήσουμε το σημείο P του Σχήματος 8.2 (με συντεταγμένες 0,0) χρησιμοποιώντας τις τιμές των δειγμάτων 1, 2 και 3 των οποίων οι συντεταγμένες είναι (-30,30), (35,25) και (-10,-20) αντίστοιχα, θα πρέπει να κατασκευάσουμε μια σειρά εξισώσεων η κάθε μια εκ των οποίων εκφράζει τη σχέση κάθε δείγματος προς κάθε άλλο στην περιοχή / όγκο ανίχνευσης και προς το υπό εκτίμηση σημείο. Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι εάν όλα τα δείγματα βρίσκονται εντός της ακτίνας ανίχνευσης η οποία ορίστηκε μόλις μικρότερη από το εύρος, τότε αυτά θα έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους, δηλαδή, θα υπάρχει συνδιακύμανση μεταξύ κάθε ζεύγους δειγμάτων ή μεταξύ ενός δείγματος και του σημείου P. Η επιρροή του καθενός στην τιμή του P θα είναι μοιρασμένη και επομένως θα πρέπει να σχηματίσουμε εξισώσεις που ορίζουν αυτήν την επιρροή.

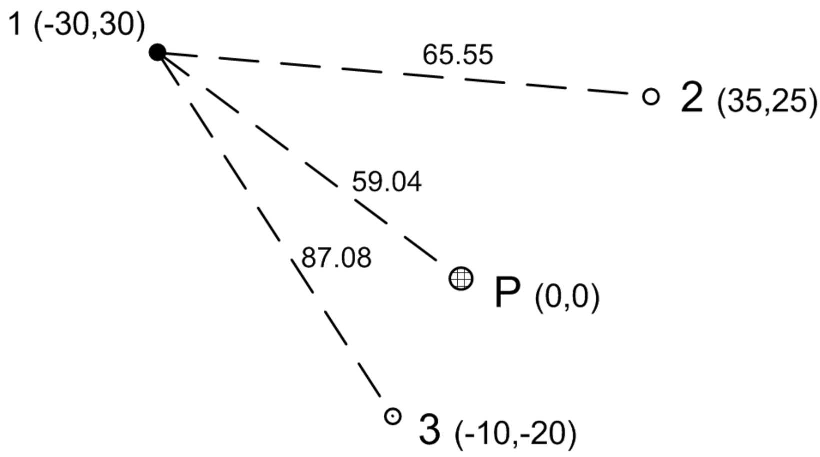
Εάν εξετάσουμε το δείγμα 1, η πρώτη μας ενέργεια είναι να καθορίσουμε τη ‘γεωστατιστική απόσταση’ του από το P και από τα δείγματα 2 και 3. Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση του συντελεστή διευθυντικής ανισοτροπίας *λ*. Στο παράδειγμα μας χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μόνο τη διαφορά των συντεταγμένων *x* και *y*, *dx* και *dy* αντίστοιχα ως εξής:

$$r = [dx^2 + (\lambda dy)^2]^{1/2}$$ **Εξίσωση 8-6**

Αυτό υποθέτει ότι ο κύριος άξονας ανισοτροπίας είναι παράλληλος στον άξονα x. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θεωρούμε τις παρακάτω παραμέτρους βαριογράμματος:

$C_o = 2.0$ $C = 3.1$ $a_x = 100m$ $a_y = 59m$

Επομένως *λ* = 1.695.



Σχήμα 8.2: Διάταξη δειγμάτων παραδείγματος σημειακού kriging.

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε τις απαραίτητες αποστάσεις ως εξής:

$$r_{1,P} = [(-30)^2 + (30 \times 1.695)^2]^{1/2} = 59.04m$$
$$r_{1,2} = 65.55m$$
$$r_{1,3} = 87.08m$$

Η χρήση του όρου *λ* στους παραπάνω υπολογισμούς μας επιτρέπει να λάβουμε υπόψη τη διεύθυνση καθώς και την απόσταση από το σημείο εκτίμησης.

Η πρώτη από τις εξισώσεις kriging, που σχετίζεται ειδικά με το δείγμα 1, μπορεί να γραφθεί σε γενική μορφή ως εξής:

$$k_1\sigma_{1,1} + k_2\sigma_{1,2} + k_3\sigma_{1,3} + \mu = \sigma_{1,P} \qquad \textbf{Εξίσωση 8-7}$$

Στην παραπάνω εξίσωση, οι τιμές k_i αντιπροσωπεύουν τα βάρη που δίνονται σε κάθε μια από τις συνδιακυμάνσεις $\sigma_{i,j}$. Τα βάρη αυτά επομένως αποδίδουν τη σχετική επιρροή κάθε σημείου στις τιμές των άλλων δειγμάτων και στο σημείο εκτίμησης. Οι συντελεστές kriging αυτοί, όπως είναι ήδη γνωστό, καθορίζονται λύνοντας όλες τις εξισώσεις του πίνακα οι οποίες περιλαμβάνουν και τον πολλαπλασιαστή Lagrange. Στο παράδειγμα μας, οι άλλες εξισώσεις του πίνακα είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} &k_1\sigma_{2,1} + k_2\sigma_{2,2} + k_3\sigma_{2,3} + \mu = \sigma_{2,P} \\ &k_1\sigma_{3,1} + k_2\sigma_{3,2} + k_3\sigma_{3,3} + \mu = \sigma_{3,P} \\ &k_1 + k_2 + k_3 = 1 \end{aligned} \qquad \textbf{Εξίσωση 8-8}$$

Η τελευταία εξίσωση προκύπτει από τη συνθήκη αμεροληψίας όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Έτσι, εάν έχουμε *ν* δείγματα τότε θα έχουμε *ν+1* εξισώσεις. Οι τιμές συνδιακύμανσης μπορούν να οριστούν από την εξίσωση μοντέλου βαριογράμματος βάζοντας ως *h* τις αποστάσεις $r_{i,j}$. Το αποτέλεσμα της εξίσωσης αυτής, σε κάθε περίπτωση, είναι η ημι-διακύμανση $\gamma(r_{i,j})$ όμως, καθώς συνδιακύμανση = οριακή τιμή – ημι-διακύμανση μπορούμε να αφαιρέσουμε τη $\gamma(r_{i,j})$ από τη C_o+C για να ορίσουμε τη συνδιακύμανση για τη συγκεκριμένη απόσταση δειγμάτων. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα μας και το δείγμα 1,

$\gamma(r_{1,1}) = C_o = 2.0$ καθώς η ημι-διακύμανση στο διάστημα 0 είναι ίση με C_o και επομένως η συνδιακύμανση $\sigma_{1,1} = C = 3.10$.

$\gamma(r_{1,2})$ = 2.0 + 3.1 [1.5 (65.55 / 100) – 0.5 (65.55 / 100)^3] (σφαιρικό μοντέλο)
= 2.0 + 2.611
= 4.61

Επομένως $\sigma_{1,2} = 2.0 + 3.1 - 4.611 = 0.489$. Ομοίως προκύπτει ότι:

$\sigma_{1,3} = 0.0743$ (παρατηρήστε τη μεγάλη απόσταση μεταξύ των 1 και 3)

$\sigma_{1,P} = 0.6737$.

Η πρώτη εξίσωση σημειακού kriging μπορεί να γραφθεί ως εξής:

$$k_1 3.1 + k_2 0.489 + k_3 0.0743 + \mu = 0.6737$$ **Εξίσωση 8-9**

Εφόσον υπολογιστούν όλες οι συνδιακυμάνσεις για τις άλλες εξισώσεις και καθοριστούν οι τιμές των συντελεστών kriging και μ, λαμβάνεται η ζυγισμένη εκτίμηση σημειακού kriging από την εξίσωση:

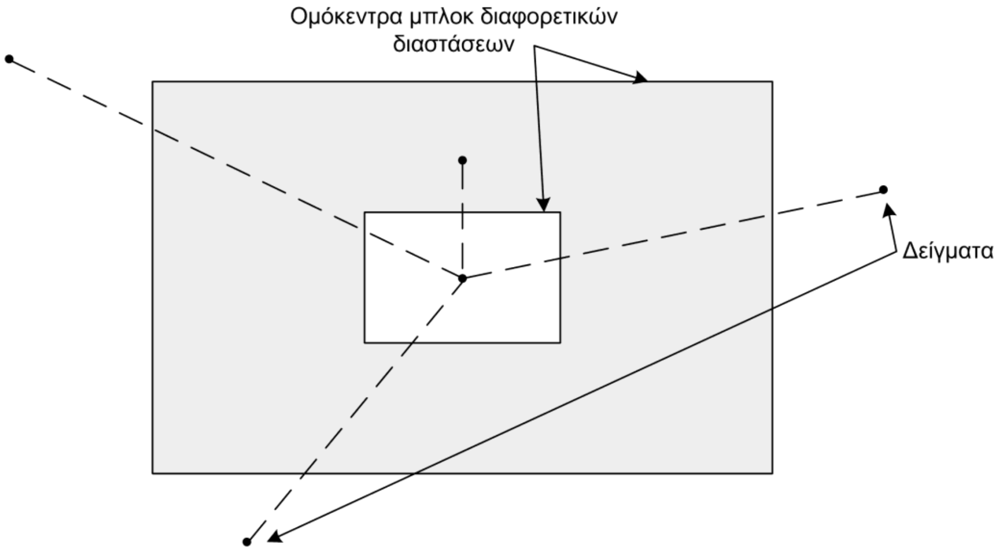
$$P = \sum^{n=3} k_i Z_i$$ **Εξίσωση 8-10**

Δεν είναι απαραίτητη η διαίρεση με το άθροισμα των συντελεστών βάρους καθώς αυτό είναι ίσο με τη μονάδα.

Μπλοκ Kriging

Η εκτίμηση μπλοκ μεταλλεύματος μπορεί να γίνει με οποιαδήποτε παραλλαγή της μεθόδου μπλοκ kriging. Οι τεχνικές αυτές αντικαθιστούν μεθόδους όπως η αντιστρόφου αποστάσεως (γραμμική, τετραγώνου, κυβική) ή άλλες τεχνικές πλεγμάτωσης και υπολογισμού ισοκαμπύλων αναλύσεων περιεκτικότητας, πάχους και συγκέντρωσης.

Μια βασική κριτική στις μεθόδους ζύγισης αντιστρόφου αποστάσεως προς τα κέντρα βάρους των μπλοκ είναι ότι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα ανεξάρτητα από το μέγεθος των μπλοκ. Αυτή η μη αποδεκτή κατάσταση αποδίδεται γραφικά στο Σχήμα 8.3 όπου δυο μπλοκ με κοινό κέντρο βάρους αλλά πολύ διαφορετικό μέγεθος λαμβάνουν την ίδια τιμή. Οι τεχνικές αυτές δεν δίνουν, επίσης, τη δυνατότητα για την εκτίμηση του σφάλματος κατά την εκτίμηση περιεκτικότητας του μπλοκ. Το kriging μπορεί να ξεπεράσει αυτά τα δυο προβλήματα. Δεν θα πρέπει βέβαια να ξεχνάμε ότι και το kriging είναι μια τεχνική εξομάλυνσης που οδηγεί σε προβλήματα όταν εξετάζουμε σώματα μεταλλοφορίας με ιδιαίτερα υψηλές διακυμάνσεις περιεκτικότητας στο χώρο. Στις περιπτώσεις αυτές είναι αναπόφευκτη η εξομάλυνση αυτών των περιεκτικοτήτων. Ο καλύτερος τρόπος αντιμετώπισης μιας τέτοιας περίπτωσης είναι ο χωρικός διαχωρισμός μέσω τρισδιάστατων μοντέλων του σώματος μεταλλοφορίας σε ζώνες υψηλών και χαμηλών περιεκτικοτήτων και η εκτέλεση του kriging χρησιμοποιώντας δεδομένα ξεχωριστά από κάθε ζώνη για την εκτίμηση μπλοκ εντός αυτής.



Σχήμα 8.3: Το πρόβλημα μη-προσέγγισης του όγκου εκτίμησης από τεχνικές όπως η μέθοδος αντιστρόφου αποστάσεως.

Στο μπλοκ kriging, ορίζεται μια ζώνη ανίχνευσης γύρω από κάθε μπλοκ μεταλλεύματος με διάμετρο ίση ή ελάχιστα μικρότερη από το διπλάσιο του εύρους σε κάθε διεύθυνση (του μεγαλύτερου εύρους στην περίπτωση ένθετων μοντέλων βαριογραμμάτων). Στην περίπτωση ισοτροπίας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια σφαιρική περιοχή ανίχνευσης με ακτίνα ελάχιστα μικρότερη από το εύρος. Σε πολλές περιπτώσεις, τα μπλοκ διαιρούνται σε πολλαπλά σημεία, τα οποία εκτιμώνται με τα ίδια δείγματα ξεχωριστά και ο μέσος όρος τους αποδίδεται στο κέντρο βάρους του μπλοκ. Τα σύγχρονα προγράμματα εκτίμησης διαθέτουν πλέον τη λειτουργία αυτή και απαιτούν από τον χρήστη την εισαγωγή των υποδιαιρέσεων των μπλοκ σε κάθε άξονα (π.χ. 4 x 4 x 1).

Κάθε δείγμα γεώτρησης που πέφτει εντός της περιοχής ανίχνευσης λαμβάνει ένα βέλτιστο συντελεστή βάρους (συντελεστής kriging) όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, και υπολογίζεται η συνολική εκτίμηση των μπλοκ μεταλλεύματος. Στην ιδανική περίπτωση θα υπάρχουν 15 με 20 δείγματα εντός της περιοχής ανίχνευσης ενώ συνήθως δεν γίνεται εκτίμηση εάν βρεθούν λιγότερα από 5 δείγματα.

Στις επόμενες παραγράφους θα εξετάσουμε μερικά συστήματα kriging τα οποία είναι διαθέσιμα από το υπάρχον λογισμικό. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι δεν είναι απαραίτητη η πλήρης κατανόηση της μαθηματικής βάσης όλων αυτών των τεχνικών, αλλά σίγουρα μια γενική αντίληψη της λειτουργίας τους είναι απαραίτητη για την επιλογή τους στην εκτίμηση ενός συγκεκριμένου κοιτάσματος.

Μπλοκ Kriging με Κανονικό Kriging

Το κανονικό kriging (ordinary kriging, OK) είναι ένας ιδιαίτερα σταθερός εκτιμητής που μπορεί να αντιμετωπίσει λοξότητα μεγάλου βαθμού στην κατανομή των δεδομένων, ενώ παράλληλα είναι ευαίσθητο στην παρουσία ακραίων τιμών και μπορεί έτσι να δώσει αναξιόπιστα αποτελέσματα. Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με το σημειακό kriging που εξετάστηκε νωρίτερα – οι εξισώσεις kriging δίνονται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \sigma_{i,j} + \mu = \sigma_{i,v} \qquad \textbf{Εξίσωση 8-11}$$

όπου $i = 1 \rightarrow n$, $\sigma_{i,j}$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ των σημείων i και j και $\sigma_{i,v}$ είναι η μέση συνδιακύμανση μεταξύ ενός σημείου i και όλων των σημείων υποδιαίρεσης του μπλοκ v που εκτιμάται. Υπάρχει, όπως πάντα, η $n+1$ εξίσωση που ορίζει το άθροισμα των συντελεστών kriging ίσο με τη μονάδα. Ο εκτιμητής ΟΚ για ένα μπλοκ θα είναι λοιπόν:

$$Z_{OK}^{*} = \sum_{i=1}^{n} K_i Z_i \qquad \textbf{Εξίσωση 8-12}$$

Η διακύμανση kriging του μπλοκ εκτίμησης μπορεί να δοθεί ως εξής:

$$\sigma_K^2 = \sigma_{v,v} + \mu - \sum_{i=1}^{n} K_i \sigma_{i,v} \qquad \textbf{Εξίσωση 8-13}$$

όπου $\sigma_{v,v}$ είναι η μέση συνδιακύμανση μεταξύ όλων των πιθανών ζευγών σημείων εντός του μπλοκ εκτίμησης. Το ΟΚ δείχνει μια αρνητική εκθετική αύξηση της διακύμανσης kriging με μια μείωση του αριθμού δειγμάτων στην περιοχή ανίχνευσης. Περισσότερες λεπτομέρειες για το ΟΚ θα δοθούν λίγο παρακάτω στη παράγραφο για τη μαθηματική βάση του μπλοκ kriging.

Μπλοκ Kriging με Απλό Kriging

Το απλό kriging (simple kriging, SK) είναι επίσης ένας σταθερός εκτιμητής αλλά εδώ δεν εφαρμόζεται ο περιορισμός για το άθροισμα των συντελεστών να είναι μονάδα. Αντί αυτού, υπολογίζεται ένα 'εξωτερικό βάρος' αφαιρώντας το άθροισμα τους από τη μονάδα. Αυτό το εξωτερικό βάρος εφαρμόζεται στη συνέχεια στη μέση τιμή $\overline{X}$ της τυχαίας μεταβλητής σε όλο το κοίτασμα ή της τυχαίας μεταβλητής στην περιοχή που περιλαμβάνει το μπλοκ εκτίμησης και της οποίας περιοχής το μέγεθος βασίζεται στην τοπική γεωλογία και τις ζώνες περιεκτικότητας. Η δεύτερη προσέγγιση είναι απαραίτητη όταν ο συνολικός μέσος είναι άνευ ουσίας λόγω της παρουσίας ζωνών περιεκτικότητας, φακών μεταλλεύματος, διαφορετικών φάσεων μεταλλογένεσης ή τεκτονικών παραγόντων. Ο εκτιμητής SK ενός μπλοκ υπολογίζεται ως εξής:

$$(1 - \sum K_i)\overline{X} + \sum_{i=1}^{n} K_i Z_i \qquad \textbf{Εξίσωση 8-14}$$

Το εξωτερικό βάρος είναι μικρό εάν υπάρχει επαρκής αριθμός δεδομένων στην περιοχή ανίχνευσης και τα αποτελέσματα των ΟΚ και SK είναι αρκετά παρόμοια. Όμως, εάν το εξωτερικό βάρος είναι μεγάλο, αυτό δείχνει ότι τα διαθέσιμα δεδομένα είναι ανεπαρκή και η τιμή του μπλοκ είναι κοντά σε αυτή του κοιτάσματος συνολικά.

Μπλοκ Kriging με Συνολικό Kriging

Όταν εμφανίζεται μεγάλη τάση ως αποτέλεσμα μη-στασιμότητας, είναι δυνατή η εφαρμογή του συνολικού Kriging (universal kriging, UK). Ο Royle (1992) αναφέρει ότι 'θεωρητικά, το πρόβλημα δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί καθώς θα πρέπει η φύση της τάσης να είναι γνωστή για να καθοριστεί το υποκείμενο βαριόγραμμα και αντίστροφα'. Ο τύπος της τάσης εξαρτάται επίσης από το μέγεθος της περιοχής στην οποία εξετάζονται τα αποτελέσματα της. Στην πράξη, δοκιμάζονται ένας αριθμός από 'κυλιόμενες περιοχές' με διάφορες εκτροπές και επιλέγεται ο πιο κατάλληλος συνδυασμός. Το βαριόγραμμα της μεταβλητής μετά την αφαίρεση της τάσης υπολογίζεται και χρησιμοποιείται σε ένα μεγαλύτερο σύστημα εξισώσεων kriging το οποίο πλέον περιέχει την τάση μαζί με τους συντελεστές kriging. Οι συναρτήσεις τάσης αποδίδονται εύκολα με χρήση πολυώνυμων. Για παράδειγμα, μια γραμμική τάση εντός ενός δισδιάστατου χώρου δίνεται ως εξής:

$$m(x) = a_0 + a_1 + a_2 y$$ **Εξίσωση 8-15**

ενώ σε τέσσερις διαστάσεις:

$$m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$ **Εξίσωση 8-16**

Μια λεπτομερής αναφορά για το UK δίνεται από τον Royle *et al.* (1981).

Μπλοκ Kriging με Διαζευκτικό Kriging

Όλα τα συστήματα kriging που εξετάσαμε ως τώρα είναι γραμμικά, δηλαδή οι εκτιμώμενες τιμές Z^* είναι γραμμικοί συνδυασμοί των δεδομένων τιμών Z_i:

$$Z^* = \sum K_i Z_i$$ **Εξίσωση 8-17**

όπου K_i είναι οι συντελεστές kriging. Στο διαζευκτικό kriging (Disjunctive Kriging, DK) περνάμε στον χώρο των μη-γραμμικών εκτιμητών και πλέον:

$$Z^* = \sum f_i(Z_i)$$ **Εξίσωση 8-18**

όπου f_i είναι συναρτήσεις των οποίων ο ορισμός απαιτεί γνώση των κατανομών των Z και Z^* και των πολυώνυμων Hermite. Η κύρια εφαρμογή του DK είναι σε μεταβλητές που δεν είναι, για παράδειγμα, γραμμικές συναρτήσεις των περιεκτικοτήτων, και στην εκτίμηση απολήψιμων αποθεμάτων σε αντίθεση με τα in-situ. Αυτό το επιτυγχάνει εκτιμώντας τις υπό συνθήκη πιθανότητες οι πραγματικές τιμές της μεταβλητής να είναι μεγαλύτερες από μια σειρά προεπιλεγμένων ορίων. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται 'τιμές δείκτη' (δείτε την παράγραφο για το kriging δείκτη). Τα πλεονεκτήματα του DK συνοδεύονται δυστυχώς από αυξημένη μαθηματική πολυπλοκότητα, μολονότι μερικά σύγχρονα πακέτα λογισμικού υποστηρίζουν αυτήν την τεχνική με χρήσιμες οδηγίες για την εφαρμογή της.

Μαθηματική Βάση του Μπλοκ Kriging

Το kriging εκτιμά την τιμή ενός μπλοκ από γειτονικά δεδομένα ώστε να ελαχιστοποιείται το αναμενόμενο τετραγωνισμένο σφάλμα εκτίμησης (διακύμανση kriging). Η εκτίμηση kriging ενός μπλοκ (Z^*_B) υπολογίζεται ως εξής:

$$Z_B^* = K_1 Z_1 + K_2 Z_2 + \ldots + K_n Z_n = \sum_i^n (K_i Z_i) \qquad \textbf{Εξίσωση 8-19}$$

όπου K_i είναι οι συντελεστές βάρους και ισχύει $K_1+K_2+\ldots+K_n=1$. Πρόκειται λοιπόν για έναν ζυγισμένο μέσο των τιμών των δειγμάτων, Z_i. Η διακύμανση εκτίμησης, σ^2_K εκφράζεται μαθηματικά ως:

$$E(Z_B^* - Z_B)^2 \qquad \textbf{Εξίσωση 8-20}$$

όπου Z_B είναι η πραγματική τιμή του μπλοκ. Για τον καθορισμό των συντελεστών βάρους που ελαχιστοποιούν τη διακύμανση εκτίμησης, λαμβάνουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τους K_i, τις δίνουμε την τιμή μηδέν και λύνουμε ως προς K_i. Καθώς το άθροισμα των συντελεστών πρέπει να είναι 1, προσθέτουμε μια ακόμα συνθήκη στην οποία μ είναι η παράμετρος Lagrange:

$$F = E(Z_B^* - Z_B)^2 + 2\mu\left(\sum_i^n K_i - 1\right) \qquad \textbf{Εξίσωση 8-21}$$

Η μερική παράγωγος για το βάρος K_i είναι:

$$\begin{aligned} \delta F / \delta K_i &= \delta / \delta K_i E(Z_B^* - Z_B)^2 + 2\mu\left(\sum_i^n K_i - 1\right) \\ &= \delta / \delta K_i \left(E(K_1 Z_1 + K_2 Z_2 + \ldots + K_n Z_n - Z_B)^2 + 2\mu\left(\sum_i^n K_i - 1\right)\right) \qquad \textbf{Εξίσωση 8-22} \\ &= 2[K_1 E(Z_i Z_1) + K_2 E(Z_i Z_2) + \ldots + K_n E(Z_i Z_n) - E(Z_i Z_B)] + 2\mu \end{aligned}$$

Η μερική παράγωγος για την παράμετρο Lagrange είναι:

$$\delta F / \delta \mu = \sum_i^n K_i - 1 \qquad \textbf{Εξίσωση 8-23}$$

Για να ελαχιστοποιηθεί η F θα πρέπει οι μερικές παράγωγοι να είναι μηδέν, δίνοντας ένα σύστημα n+1 εξισώσεων με n+1 αγνώστους:

$$
\begin{aligned}
&K_1E(Z_1Z_1)+K_2E(Z_1Z_2)+\ldots+K_nE(Z_1Z_n)+\mu=E(Z_1Z_B)\\
&K_1E(Z_2Z_1)+K_2E(Z_2Z_2)+\ldots+K_nE(Z_2Z_n)+\mu=E(Z_2Z_B)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \ldots\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \ldots\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&K_1E(Z_nZ_1)+K_2E(Z_nZ_2)+\ldots+K_nE(Z_nZ_n)+\mu=E(Z_nZ_B)\\
&K_1+K_2+\ldots+K_n=1
\end{aligned}
$$

Εξίσωση 8-24

Αφαιρώντας τον m^2 και από τις δυο πλευρές των πρώτων n εξισώσεων, είναι δυνατή η μετατροπή των όρων εντός των παρενθέσεων σε συνδιακυμάνσεις. Για παράδειγμα, η ν-ιοστή εξίσωση γίνεται:

$$
K_1E(Z_\nu Z_1)-K_1m^2+K_2E(Z_\nu Z_2)-K_2m^2+\ldots+K_nE(Z_\nu Z_n)-K_nm^2+\mu=E(Z_\nu Z_B)-m^2
$$

Εξίσωση 8-25

Αυτό είναι δυνατό καθώς τα K_i δίνουν άθροισμα τη μονάδα. Όταν ισχύει η στασιμότητα τότε $E(Z_i) = m$ και μπορούμε να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις ως εξής:

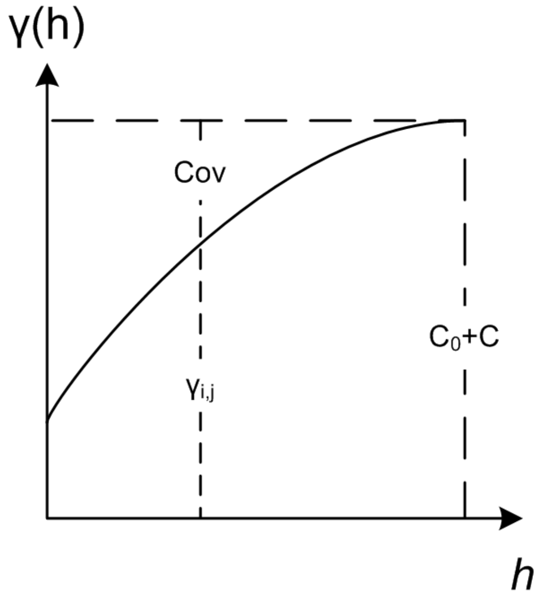
$$
\begin{aligned}
&K_1\sigma_{1,1}+K_2\sigma_{1,2}+\ldots+K_n\sigma_{1,n}+\mu=\sigma_{1,B}\\
&K_1\sigma_{2,1}+K_2\sigma_{2,2}+\ldots+K_n\sigma_{2,n}+\mu=\sigma_{2,B}\\
&\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots+\ldots+\ldots\ldots\ldots+\ldots=\ldots\ldots\\
&K_1\sigma_{n,1}+K_2\sigma_{n,2}+\ldots+K_n\sigma_{n,n}+\mu=\sigma_{n,B}\\
&K_1+K_2+\ldots+K_n=1
\end{aligned}
$$

Εξίσωση 8-26

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το $\sigma_{1,1}$ εκφράζει τη συνδιακύμανση μεταξύ ενός δείγματος και του εαυτού του ενώ $\sigma_{1,2}$ εκφράζει τη συνδιακύμανση μεταξύ των δειγμάτων 1 και 2, κλπ. Οι εξισώσεις αυτές λύνονται για να υπολογιστούν οι συντελεστές βάρους που θα χρησιμοποιηθούν στις εκτιμήσεις kriging. Η συνδιακύμανση $\sigma_{i,j}$ μεταξύ δύο δειγμάτων καθορίζεται από το βαριόγραμμα όπως στο σχήμα 8.4 και δίνεται ως εξής:

$$
\sigma_{i,j}=(C_0+C)-\gamma_{i,j}
$$

Εξίσωση 8-27



Σχήμα 8.4: Σχέση μεταξύ συνδιακύμανσης (Cov) και ημι-διακύμανσης $\gamma_{i,j}$.

Στις παραπάνω εξισώσεις kriging μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $\gamma_{i,j}$ αντί της συνδιακύμανσης – δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Η απόσταση *h* μεταξύ των δειγμάτων υπολογίζεται με βάση τις συντεταγμένες X και Y και το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\gamma(h) = C_0 + C[3h/2a - (h/a)^3/2] \text{ για } h<\alpha$$ **Εξίσωση 8-28**

ή

$$\gamma(h) = C_0 + C \text{ για } h\geq\alpha$$ **Εξίσωση 8-29**

Στην ισοτροπική περίπτωση

$$h = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$$ **Εξίσωση 8-30**

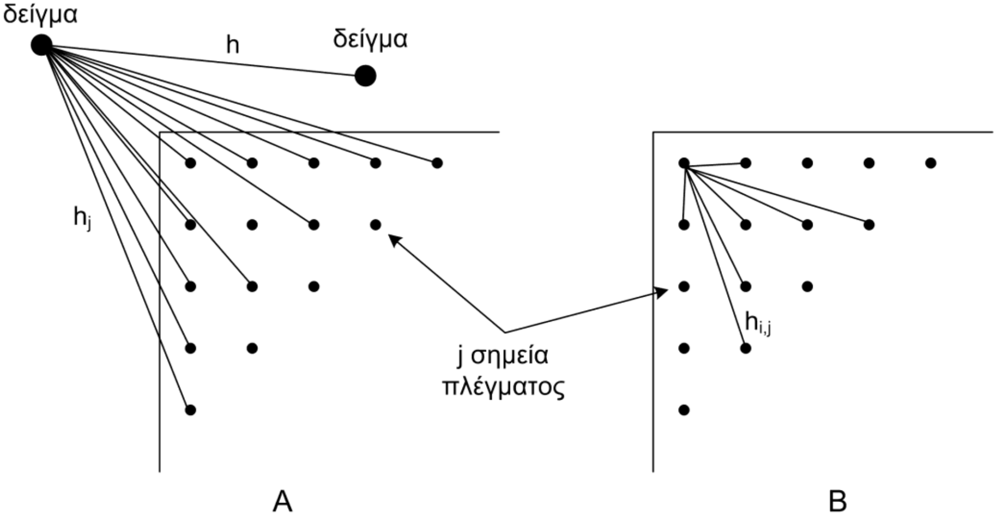
Όμως, στην ανισοτροπική περίπτωση δυο διαστάσεων:

$$h = [(x_1 - x_2)^2 + \lambda^2 (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$$ **Εξίσωση 8-31**

όπου *λ* είναι ο συντελεστής ανισοτροπίας ή το εύρος στη διεύθυνση *x* διαιρούμενο με το εύρος στη διεύθυνση *y*. Στην ανισοτροπική περίπτωση τριών διαστάσεων:

$$h = [(x_1 - x_2)^2 + \lambda_1^2 (y_1 - y_2)^2 + \lambda_2^2 (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$$ **Εξίσωση 8-32**

όπου λ_1 και λ_2 είναι οι συντελεστές ανισοτροπίας μεταξύ των διευθύνσεων X-Y και X-Z.



Σχήμα 8.5: (A) Μπλοκ kriging χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα σημείων εντός του μπλοκ. Συνδιακύμανση μεταξύ δειγμάτων και μεταξύ δείγματος και σημείων εντός του μπλοκ. (B) Συνδιακύμανση μεταξύ σημείων εντός του μπλοκ.

Για τον καθορισμό της συνδιακύμανσης μεταξύ ενός δείγματος και ενός μπλοκ ($\sigma_{i,B}$), το μπλοκ θεωρείται ότι εκπροσωπείται από ένα πλέγμα *j* σημείων (Σχήμα 8.5). Η συνδιακύμανση μεταξύ αυτών των σημείων και του δείγματος καθορίζεται και στη συνέχεια υπολογίζεται η μέση συνδιακύμανση. Η ανάλυση του πλέγματος μπορεί να είναι, για παράδειγμα, 10x10, και επομένως η τιμή της $\sigma_{i,B}$ θα είναι ο μέσος όρος εκατό τιμών $\sigma_{i,j}$. Η απόσταση h_i μεταξύ κάθε σημείου του πλέγματος και του δείγματος *i* υπολογίζεται και χρησιμοποιείται στην εξίσωση του βαριογράμματος για τον υπολογισμό του $\gamma_{i,j}$.

Διακύμανση Εκτίμησης Kriging

Η διακύμανση εκτίμησης είναι:

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= E(Z_B^* - Z_B)^2 \\ &= E(Z_B^*)^2 - 2E(Z_B^* Z_B) + E(Z_B)^2\end{aligned}$$

Εξίσωση 8-33

Όπως και πριν, μπορούμε να προσθέσουμε και να αφαιρέσουμε τον μέσο:

$$\sigma_e^2 = E(Z_B^*)^2 - m^2 2E(Z_B^* Z_B) + 2m^2 + E(Z_B)^2 - m^2$$
$$= \sigma_{Z_B^*}^2 - 2\sigma_{Z_B^* Z_B} + \sigma_{Z_B}^2 \quad \textbf{Εξίσωση 8-34}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_i K_j \sigma_{i,j} - 2\sum_{i=1}^{n} K_i \sigma_{1,B} + \sigma_{Z_B}^2$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε εκτιμητή ζυγισμένου μέσου. Στην περίπτωση ενός εκτιμητή kriging μπορεί να απλοποιηθεί. Εάν κάθε μια από τις εξισώσεις kriging πολλαπλασιαστεί με το βάρος *i*, τότε:

$$K_i K_1 \sigma_{i,1} + K_i K_2 \sigma_{i,2} + \ldots + K_i K_n \sigma_{i,n} + K_i \mu = K_i \sigma_{i,B} \quad \textbf{Εξίσωση 8-35}$$

Στη συνέχεια τα αποτελέσματα αθροίζονται και έτσι έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_i K_j \sigma_{i,j} + \mu = \mu \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} K_i \sigma_{i,B} \quad \textbf{Εξίσωση 8-36}$$

Η διακύμανση εκτίμησης kriging μπορεί έτσι να εκφραστεί ως:

$$\sigma_K^2 = \sigma_{Z_B} - \sum_{i=1}^{n} K_i \sigma_{i,B} + \mu \quad \textbf{Εξίσωση 8-37}$$

όπου σ_{ZB} είναι η μέση συνδιακύμανση μεταξύ όλων των ζευγών σημείων υποδιαίρεσης στο μπλοκ εκτίμησης και $\sigma_{i,B}$ είναι η μέση συνδιακύμανση μεταξύ κάθε δείγματος και όλων των σημείων υποδιαίρεσης του μπλοκ. Η σ_{ZB} καθορίζεται υπολογίζοντας την τιμή $\gamma(h_{i,j})$ για κάθε δυνατό ζευγάρι σημείων υποδιαίρεσης (Σχήμα 8.5) και στη συνέχεια τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων. Έτσι:

$$\sigma_{Z_B} = C_0 + C - \gamma(h_{i,j}) \quad \textbf{Εξίσωση 8-38}$$

Η $\sigma_{i,B}$ απαιτεί τον καθορισμό της απόστασης μεταξύ κάθε δείγματος και κάθε σημείου υποδιαίρεσης. Από αυτήν μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές του $\gamma(h_{i,j})$ βάση του μαθηματικού μοντέλου για το αποδεκτό βαριόγραμμα και έτσι καταλήγουμε στις τιμές $\sigma_{i,j}$. Η μέση τιμή της $\sigma_{i,j}$ μας δίνει τη $\sigma_{i,B}$. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε δείγμα στην περιοχή ανίχνευσης.

Cokriging

Στην περίπτωση εξέτασης δύο καλά συσχετιζόμενων μεταβλητών, μπορεί να είναι χρήσιμο να χρησιμοποιηθεί το συνδυαστικό kriging ή cokriging (CoK). Οι δυο μεταβλητές χρησιμοποιούνται μαζί για την εκτίμηση της κάθε μιας με τη σειρά, δίνοντας έτσι ένα πιο πλούσιο σετ δεδομένων. Πέρα από τα βαριογράμματα της κάθε μεταβλητής, μοντελοποιείται ένα συν-βαριόγραμμα που αποτυπώνει το πως συν-μεταβάλλονται στο χώρο.

Παραδείγματα εφαρμογής του cokriging μπορεί να είναι κοιτάσματα όπου ο Pb συσχετίζεται θετικά με τον Zn ή τον Ag, ώστε το ένα στοιχείο να χρησιμοποιείται στην εκτίμηση του άλλου όταν λείπουν τιμές. O Pb μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εκτίμηση του περιεχόμενου Ag, μειώνοντας το κόστος των αναλύσεων αργύρου που είναι σχετικά ακριβές. Σε κάθε περίπτωση, η σωστή εφαρμογή αυτής της μεθόδου προϋποθέτει την ύπαρξη υψηλού συσχετισμού μεταξύ των μεταβλητών. Όταν συμβαίνει αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε το συν-βαριόγραμμα των μεταβλητών $Z_1(i)$ και $Z_2(i)$ από την παρακάτω εξίσωση:

$$\gamma_{1.2}(h) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\{[Z_1(x) - Z_1(x+h)][Z_2(x) - Z_2(x+h)]\}}{2N}$$ **Εξίσωση 8-39**

Η μοντελοποίηση του συν-βαριογράμματος γίνεται κανονικά. Στη συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και σημειακό kriging για την εκτίμηση των τιμών που λείπουν. Η χρήση του συνδυαστικού kriging προτιμάται όταν μια μεταβλητή που μπορεί να μετρηθεί με υψηλό κόστος ή δυσκολία συσχετίζεται καλά με μια άλλη μεταβλητή που μετριέται με χαμηλό κόστος. Στην πράξη, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα πέρα από τα κοιτάσματα ουρανίου όπου συσχετίζονται ραδιομετρικά δεδομένα χαμηλού κόστους από γεωτρήσεις δειγματοληψίας με ακριβές αναλύσεις ουρανίου από πολύ ακριβούς πυρήνες.

Λογαριθμικό Kriging

Το λογαριθμικό kriging (Lognormal Kriging, LK) χρησιμοποιείται σε δεδομένα με αρκετή λοξότητα και την προϋπόθεση ότι τα δεδομένα έχουν λογαριθμική κατανομή. Με άλλα λόγια, ότι οι λογάριθμοι των δεδομένων έχουν κανονική κατανομή ή, στην περίπτωση μιας λογαριθμικής κατανομής τριών παραμέτρων, ότι οι λογάριθμοι των τιμών των δεδομένων συν μια σταθερά έχουν κανονική κατανομή. Η πραγματική λογαριθμικότητα είναι βασική για την αποφυγή παράλογων εκτιμήσεων, π.χ. αρνητικών διακυμάνσεων kriging.

Το LK είναι ιδανικό σε περιπτώσεις υψηλών, ακραίων τιμών σε μικρά σετ δεδομένων όπου ασκούν μια συνολικά δυσανάλογη επιρροή. Η χρήση λογαρίθμων επαναφέρει τους λογάριθμους αυτών των τιμών στα επίπεδα των υπόλοιπων. Η κατασκευή αρχικών διαγραμμάτων αθροιστικής συχνότητας των δεδομένων σε λογαριθμικό χαρτί οδηγεί στην επιλογή μιας λογαριθμικής κατανομής δυο ή τριών παραμέτρων. Ανάλογα με το αποτέλεσμα, κατασκευάζεται και μοντελοποιείται ένα βαριόγραμμα της τιμής *ln(τιμή)* ή *lnl(τιμή + σταθερά)*. Ένα σύστημα απλού kriging χρησιμοποιείται στους λογάριθμους, με τις παραμέτρους του λογαριθμικού βαριογράμματος, και οι εκτιμήσεις που λαμβάνονται έτσι μετατρέπονται τελικά σε αριθμητικές τιμές. Η μετατροπή των λογαριθμικών εκτιμήσεων kriging σε απόλυτες εκτιμήσεις έχει ως εξής:

Η εξίσωση ενός αμερόληπτου εκτιμητή Z^* της Z (όπου *(Z(x)* είναι λογαριθμική) όπως υπολογίζεται από τη Y^* (όπου *Y(x) = Log Z(x)* και είναι κανονική) είναι:

$$Z^* = \exp(Y^* - \mu + \sigma_{ke}^2 / 2)$$ **Εξίσωση 8-40**

όπου Z^* είναι η σημειακή εκτίμηση της Z, μ είναι ο συντελεστής Lagrange και σ_{ke}^2 είναι η λογαριθμική διακύμανση kriging. Η εξίσωση για τη μετατροπή μιας λογαριθμική διακύμανσης kriging σε απόλυτη διακύμανση είναι η εξής:

$$\sigma_k^2 = m^2 \exp(\sigma_v^2)[1 + \exp(\mu - \sigma_{ke}^2)(\exp(\mu) - 2)]$$ **Εξίσωση 8-41**

όπου σ_k^2 = διακύμανση kriging της εκτίμησης μιας τιμής μπλοκ
m = μέσος όρος των τιμών μπλοκ στο κοίτασμα
σ_v^2 = διακύμανση των λογάριθμων των τιμών μπλοκ
μ = συντελεστής Lagrange
σ_{ke}^2 = λογαριθμική διακύμανση kriging

Εκτός της ιδιαίτερης εξάρτησης της από την κατανομή των δεδομένων, η μέθοδος LK μπορεί να έχει την ιδιότητα της παραγωγής μεροληπτικών εκτιμήσεων. Γενικά, τα συστήματα kriging έχουν δύο επιθυμητές ιδιότητες:

1. αμεροληψία
2. ελάχιστα σφάλματα εκτίμησης

Το LK δίνει χαμηλότερες διακυμάνσεις kriging από λογαριθμικά δεδομένα από το απλό kriging αλλά το συνήθως παρατηρούμενο μεροληπτικό σφάλμα (της τάξης του 5 με 7%) καθιστά το LK μη ελκυστικό σε πολλές εφαρμογές. Συχνά γίνεται μια διόρθωση ‘κουκουλώματος’ πολλαπλασιάζοντας της εκτιμήσεις LK με ένα γενικό συντελεστή για την αφαίρεση του μεροληπτικού σφάλματος.

Kriging Δείκτη

Το kriging δείκτη (Indicator Kriging, IK) είναι μια μη-παραμετρική γεωστατιστική μέθοδος καθώς δεν επηρεάζεται από τη φύση του στατιστικού πληθυσμού ή την ύπαρξη ακραίων τιμών. Τα αρχικά δεδομένα μετατρέπονται σε δείκτες που μπορεί να είναι 1 ή 0 ανάλογα με τη σχέση τους προς ένα συγκεκριμένο όριο εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας. Το IK μας επιτρέπει το καθορισμό του ποσοστού ενός μπλοκ εκτίμησης που έχει 95% πιθανότητα να έχει περιεκτικότητα πάνω από το όριο εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας.

Εκτίμηση Μεταλλεύματος-Στείρων με IK

Το kriging δείκτη αποτελεί εξέλιξη του Απλού Kriging, με τη διαφορά ότι δεν υπολογίζει την περιεκτικότητα ή συγκέντρωση ενός μετάλλου αλλά το ποσοστό ενός μπλοκ που αναμένεται να περιέχει τιμή πάνω από ένα δοσμένο όριο. Η τεχνική αυτή είναι ιδιαίτερα εφαρμόσιμη σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν αυστηρά όρια μεταλλεύματος/στείρων εντός συγκεκριμένων μπλοκ. Το απλό kriging εκτιμά την αναμενόμενη περιεκτικότητα ενός μπλοκ η οποία είναι μια πραγματική αντανάκλαση της αξίας του με την προϋπόθεση ότι θα εξορυχτεί ολόκληρο ως μια μονάδα. Δεν μας επιτρέπει όμως να καθορίσουμε το κατά πόσο η τιμή ενός μπλοκ παρασύρεται σε μεγάλο βαθμό από μια μοναδική υψηλή τιμή ή εάν περιέχει περιοχές στείρου υλικού και μεταλλεύματος.

Μπορούμε να αναλύσουμε το πρόβλημα περαιτέρω εξετάζοντας ένα μπλοκ μεταλλοφορίας το οποίο εκτιμάται με γεωτρήσεις στις τέσσερις γωνίες του. Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι η τιμή του μπλοκ προκύπτει από τον αριθμητικό μέσο των τεσσάρων γεωτρήσεων (δηλαδή, το πάχος είναι σταθερό). Το μπλοκ Α του σχήματος έχει μέση περιεκτικότητα 5.75 g/t και, δοσμένου του ορίου εκμεταλλευσιμότητας των 5 g/t, θεωρείται ως μετάλλευμα. Παρόλο που το μπλοκ Β έχει ακριβώς την ίδια περιεκτικότητα και επομένως ταξινομείται ως μετάλλευμα, η απόφαση αυτή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από μια μοναδική τιμή, γεγονός που δεν αποδίδεται άμεσα στο αποτέλεσμα. Ας υποθέσουμε πως εξετάζεται ο τύπος του υλικού που χρησιμοποιείται στην εκτίμηση του μπλοκ ώστε το μετάλλευμα να δείχνεται με την τιμή 1 και τα στείρα με την τιμή 0. Έτσι, στο πρώτο παράδειγμα, οι τιμές των δειγμάτων ταξινομούνται σύμφωνα με το όριο των 5 g/t ως εξής:

Γεώτρηση	**Περιεκτικότητα**	**Κατηγορία**	**Τιμή Δείκτη**
1	6 g/t	μετάλλευμα	1
2	5 g/t	μετάλλευμα	1
3	6 g/t	μετάλλευμα	1
4	6 g/t	μετάλλευμα	1

Η μέση περιεκτικότητα του μπλοκ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για μετάλλευμα και οι τιμές δείκτη δείχνουν ότι αναμένεται να περιέχει 100% υλικό εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας. Εάν εξετάσουμε το δεύτερο παράδειγμα έχουμε:

Γεώτρηση	**Περιεκτικότητα**	**Κατηγορία**	**Τιμή Δείκτη**
1	1 g/t	στείρα	0
2	2 g/t	στείρα	0
3	19 g/t	μετάλλευμα	1
4	1 g/t	στείρα	0

Παρόλο που η μέση περιεκτικότητα δείχνει ότι το μπλοκ είναι μετάλλευμα, η μέση τιμή δείκτη είναι 0.25 που δείχνει ότι μόνο το 25% είναι υλικό εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας. Το γεγονός αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την κατασκευή της τελικής καμπύλης περιεκτικότητας / τονάζ για να αποφευχθεί η υπερεκτίμηση του τονάζ μεταλλεύματος.

Η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου στη γεωστατιστική εκτίμηση αποθεμάτων προτάθηκε αρχικά από τον Journel (1983) και στη συνέχεια βελτιώθηκε από τον Lemmer (1984). Η μαθηματική έκφραση για μια μεταβλητή δείκτη είναι $i(x;z)$ και βασίζεται στην περιεκτικότητα *z(x)* ενός δείγματος στο σημείο *x* και το όριο εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας *z*. Έτσι:

$$i(x;z)=\begin{cases}1, if\, z(x)\geq z\\ 0, if\, z(x)<z\end{cases}$$ **Εξίσωση 8-42**

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ορισμένα πακέτα λογισμικού δίνουν την τιμή 1 κάτω από το καθορισμένο όριο και την τιμή 0 πάνω από αυτό. Αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη σε οποιαδήποτε ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Εφόσον όλες οι πληροφορίες περιεκτικότητας μετατραπούν σε δείκτες, θα έχουμε μόνο τιμές 0 και 1. Η βαριογραφία γίνεται όπως και πριν. Εφόσον εξετάζεται η προσαρμογή ενός σφαιρικού μοντέλου, η εξίσωση του θα έχει ως εξής:

$$\gamma_I(h;z)=\begin{cases}I_0+I[1.5(h/a)-0.5(h/a)^3], h<a\\ I_0+I, h\geq a\end{cases}$$ **Εξίσωση 8-43**

όπου I_0 και I είναι ισοδύναμα των C_0 και C στο βαριόγραμμα της περιεκτικότητας. Αυτές οι παράμετροι του βαριογράμματος δείκτη χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για τον υπολογισμό τιμών δεικτών των μπλοκ χρησιμοποιώντας τεχνικές απλού kriging, ενώ η όλη μεθοδολογία αναφέρεται ως Kriging Δείκτη. Η τιμή δείκτη ενός μπλοκ αποδίδει τη συνάρτηση ανάκτησης για το συγκεκριμένο μπλοκ και για συγκεκριμένο όριο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για ένα εύρος ορίων εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας.

Το τελικό προϊόν είναι ένας χάρτης εκτιμήσεων περιεκτικότητας kriging και τιμές δείκτη που είναι ιδιαίτερα ωφέλιμος για μια επιχείρηση όπου είναι δυνατή η επιλεκτική εξόρυξη μέσα στα όρια των μπλοκ εκτίμησης. Μπορούν έτσι να υπολογιστούν τονάζ των μπλοκ που θα βοηθήσουν στην κατασκευή μιας πιο ρεαλιστικής καμπύλης περιεκτικότητας / τονάζ. Επίσης, η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του ποσοστού συγκεκριμένων πετρωμάτων ή τύπων υλικών (μεταλλουργικών) εντός κάθε μπλοκ του μοντέλου.

Ορισμός Σωμάτων Μεταλλοφορίας με IK

Εφαρμόζοντας μια σειρά από όρια περιεκτικότητας και κατασκευάζοντας τα αντίστοιχα βαριογράμματα δείκτη, είναι δυνατή η επιλογή ενός βαριογράμματος το οποίο δίνει την πιο καλά ορισμένη δομή σε μια δοσμένη διεύθυνση. Έτσι ορίζονται τα σώματα μεταλλοφορίας στα οποία υπάρχει καλή χωρική συνέχεια. Οι διαστάσεις των σωμάτων αυτών λαμβάνονται ως ισοδύναμες του εύρους σε κάθε διεύθυνση.

Μοντελοποίηση Βαριογράμματος με IK

Ο Lemmer (1984) αναφέρει ότι τα βαριογράμματα δείκτη είναι πολύ πιο σταθερά ως προς την παρουσία ακραίων τιμών από τα βαριογράμματα περιεκτικότητας ή συγκέντρωσης. Έτσι τα βαριογράμματα δείκτη μπορούν να μοντελοποιηθούν με πολύ περισσότερη σιγουριά. Επίσης, όταν το φαινόμενο ψήγματος δεν είναι πολύ μικρό, όπως στην περίπτωση των συγκεντρώσεων χρυσού στο Witwatersand, τότε υπάρχει μια σχεδόν γραμμική σχέση μεταξύ του $\gamma_I(h;z)$ και του $\gamma(h)$ για διαδοχικά διαστήματα και για ορισμένο όριο περιεκτικότητας. Είναι δυνατή η σχεδίαση μιας γραμμής καλύτερης προσαρμογής ελαχίστων τετραγώνων στα σημεία του βαριογράμματος. Η εξίσωση αυτή της γραμμής είναι η εξής:

$$\gamma_I(h;z) \approx A(z) + B(z)\gamma(h) \qquad \textbf{Εξίσωση 8-44}$$

Όπου $A(z)$ είναι το σημείο τομής στον άξονα $\gamma_I(h;z)$ και $B(z)$ είναι η κλίση της ευθείας. Τα C_0 και C μπορούν πλέον να υπολογιστούν μέσω των I_0 και I από το βαριόγραμμα δείκτη και θέτοντας $h=a$ και $h=0$ στην εξίσωση του βαριογράμματος δείκτη καθώς και στην παραπάνω εξίσωση της ευθείας, ως εξής:

Για $h=a$,

$$\gamma_I(h;z) = I_0 + I \text{ και } \gamma(h) = C_0 + C \qquad \textbf{Εξίσωση 8-45}$$

επομένως,

$$I_0 + I = A(z) + B(z)(C_0 + C) \qquad \textbf{Εξίσωση 8-46}$$

και έτσι,

$$C_0 + C = [I_0 + I - A(z)] / B(z) \qquad \textbf{Εξίσωση 8-47}$$

Για $h=0$,

$$\gamma_I(h;z) = I_0 \qquad \textbf{Εξίσωση 8-48}$$

και,

$$I_0 = A(z) + B(z)(C_0) \qquad \textbf{Εξίσωση 8-49}$$

επομένως,

$$C_0 = [I_0 - A(z)] / B(z) \qquad \textbf{Εξίσωση 8-50}$$

Υποθέτουμε ότι το εύρος είναι το ίδιο και στα δυο βαριογράμματα. Αυτό το μοντέλο μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στο πειραματικό βαριόγραμμα περιεκτικότητας για να ελεγχθεί η ποιότητα προσαρμογής του μοντέλου.

Kriging Πιθανοτήτων

Το kriging πιθανοτήτων (Probability Kriging, PK) είναι μια ακόμα μη-παραμετρική μέθοδος εκτίμησης που δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές. Επιλέγεται μια σειρά *N* ορίων εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας που διαιρούν το εύρος των δεδομένων σε μια σειρά ισόποσων κλάσεων. Κάθε όριο χρησιμοποιείται για την κατασκευή μιας σειράς από *N* βαριογράμματα δείκτη με τιμές μεγαλύτερες ή ίσες σε κάθε όριο που λαμβάνει την τιμή δείκτη 1.

Στη συνέχεια υπολογίζονται ομοιογενείς τιμές U_i βάζοντας τις τιμές των δειγμάτων σε αύξουσα σειρά και διαιρώντας τον αριθμό σειράς με το συνολικό πλήθος των δειγμάτων. Έτσι παίρνουμε τιμές U_i 1/n, 2/n, 3/n έως n/n και επομένως η μικρότερη τιμή είναι κοντά στο μηδέν ενώ η μεγαλύτερη είναι 1. Πλέον μπορούν να κατασκευαστούν βαριογράμματα της U_i καθώς και N συν-βαριογράμματα μεταξύ των τιμών Δείκτη και των Ομοιογενών. Οι παράμετροι των βαριογραμμάτων αυτών μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη εκτέλεση cokriging στις τιμές Δείκτη και στις Ομοιογενείς ώστε για καθένα από τα N όρια μπορούμε να εκτιμήσουμε το ποσοστό κάθε μπλοκ πάνω από το κάθε όριο. Κάθε δείγμα μπορεί επίσης να εκτιμηθεί με cokriging ακολουθώντας μια μέθοδο παρόμοια με το σημειακό kriging. Αυτό επιτρέπει τον καθορισμό τιμών I_i και U_i για κάθε δείγμα και επίσης τον εντοπισμό των πιο μεροληπτικών τιμών δείκτη.

Ο Royle (1992) σημειώνει ότι το kriging πιθανοτήτων καθιστά την εκτίμηση μπλοκ πιο ευέλικτη. Εάν, για παράδειγμα, έχουμε 4 δείγματα στις γωνίες ενός ορθογώνιου που πρόκειται να εκτιμηθεί, τότε το IK μπορεί να δώσει μόνο 5 δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή 0.0, 0.25, 0.50, 0.75 ή 1.0. Η τελευταία τιμή προκύπτει όταν όλες οι περιεκτικότητες είναι πάνω από το όριο. Η χρήση Ομοιογενών τιμών ξεπερνά αυτόν τον περιορισμό.

Υπολογισμός Συνολικών Αποθεμάτων με Kriging

Η διαδικασία μπλοκ kriging σε τρεις διαστάσεις οδηγεί σε περιεκτικότητες σχετικές με μπλοκ σταθερών διαστάσεων. Έτσι η συνολική περιεκτικότητα ενός κοιτάσματος είναι ο αριθμητικός μέσος των εκτιμήσεων kriging των μπλοκ που θεωρούνται οικονομικά εκμεταλλεύσιμα, δηλαδή είναι πάνω από το προκαθορισμένο όριο ελάχιστης περιεκτικότητας. Παρόλο που η διακύμανση kriging του κάθε μπλοκ δείχνει το πόσο καλά εκτιμήθηκε, η μέση διακύμανση kriging δεν μας βοηθά όταν εξετάζουμε το σύνολο του κοιτάσματος.

Στην περίπτωση δισδιάστατης μοντελοποίησης ενός κοιτάσματος με μεταβλητό πάχος, η διαδικασία kriging παράγει εκτιμήσεις συγκέντρωσης μετάλλου ($ΣΜ_{Ki}$) και πάχους ($Π_{Ki}$) και επομένως τις εκτιμήσεις περιεκτικότητας για όλα τα μπλοκ μεταλλεύματος μέσα σε ένα κοίτασμα, οι οποίες ορίζονται από τις τρισδιάστατες συντεταγμένες του κέντρου βάρους των μπλοκ. Η κάθε μια από αυτές τις τιμές συνοδεύεται από μια διακύμανση kriging, μια σχετική τυπική απόκλιση kriging (σ_K / Z_K^*) και το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνονται στην περιοχή ανίχνευσης του kriging για κάθε μπλοκ.

Συνολική περιεκτικότητα: $\sum_{i=1}^{n} \Sigma \mathrm{M}_{K_i} / \sum \Pi_{K_i}$

Τα όρια εμπιστοσύνης 95% και η ακρίβεια της εκτίμησης περιεκτικότητας μπορούν πλέον να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\sigma_{K_G}^2}{G_K^2} = \frac{\sigma_{K_{\Sigma\mathrm{M}}}^2}{\Sigma\mathrm{M}_{\mathrm{K}}^2} + \frac{\sigma_{K_\Pi}^2}{\Pi_K^2} - 2\rho\left(\frac{\sigma_{K_{\Sigma\mathrm{M}}}}{\Sigma\mathrm{M}_K} \cdot \frac{\sigma_{K_\Pi}}{\Pi_K^2}\right)$$ **Εξίσωση 8-51**

όπου $ΣΜ_K$ και $Π_K$ είναι η μέση συγκέντρωση και το μέσο πάχος kriging για το κοίτασμα. Το πρόβλημα που προκύπτει όμως είναι με τη διακύμανση εκτίμησης όπως ήδη αναφέραμε καθώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέση διακύμανση εκτίμησης για όλο το κοίτασμα.

Τα μπλοκ στις άκρες ενός σώματος μεταλλοφορίας μπορεί να έχουν πολύ μεγάλες διακυμάνσεις εκτίμησης εν μέρη λόγω έλλειψης δειγμάτων αλλά και λόγω ενός φαινομένου που ονομάζεται **Φαινόμενο Άκρων**. Η ΧΜ της περιεκτικότητας περιλαμβάνει τον όρο $1/\Pi_K^2$ στις ΧΜ της συγκέντρωσης και του πάχους και επομένως κάποιες λεπτές ζώνες μεταλλεύματος, συνήθεις στη περιφέρεια του σώματος μεταλλοφορίας, θα έχουν αυξημένα σφάλματα στην εκτίμηση περιεκτικότητας. Μπορεί να είναι απαραίτητο να αποκλειστούν αυτά τα μπλοκ από τον υπολογισμό αποθεμάτων. Για τη μείωση των υψηλών διακυμάνσεων kriging στα όρια του σώματος μεταλλοφορίας είναι σημαντικό να αυξήσουμε την πυκνότητα των γεωτρήσεων στις περιοχές αυτές και να αποφύγουμε να μειώσουμε το αριθμό τους στις οικονομικά λιγότερο ενδιαφέρουσες περιοχές, κάτι που συχνά φαίνεται λογικό. Έτσι χρειαζόμαστε μεγαλύτερη πυκνότητα γεωτρήσεων για να καθορίσουμε εάν τα οριακά μπλοκ θα πρέπει να θεωρηθούν οικονομικά ή όχι. Οι εκτιμήσεις μας σε αυτά τα μπλοκ θα πρέπει να είναι περισσότερο ακριβείς εάν θέλουμε να αποφύγουμε τις δυσάρεστες συνέπειες από τη λάθος ταξινόμηση μπλοκ ως μετάλλευμα ή στείρα.

Υπάρχουν δύο τρόποι να ξεπεράσουμε το πρόβλημα επιλογής της τιμής της διακύμανσης εκτίμησης. Ο πρώτος χρησιμοποιεί τις διακυμάνσεις εκτίμησης της περιεκτικότητας (3Δ) ή της συγκέντρωσης μετάλλου και του πάχους (2Δ), όπως δίνονται από τη θεωρία για τη διακύμανση επέκτασης. Σε ένα 3Δ μοντέλο μπλοκ, η διακύμανση εκτίμησης ενός μπλοκ υπολογίζεται και στη συνέχεια διαιρείται δια του συνολικού αριθμού μπλοκ στο μοντέλο δίνοντας τη συνολική διακύμανση εκτίμησης και επομένως την ακρίβεια της περιεκτικότητας. Η διακύμανση εκτίμησης μπλοκ για μια ισοτροπική 3Δ κατάσταση μπορεί να υπολογιστεί από τις διακυμάνσεις επέκτασης των παραλληλεπίπεδων. Εναλλακτικά, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν διαγράμματα 2Δ διακύμανσης επέκτασης για τετράγωνα μπλοκ σε κάθε επίπεδο ή τομή του μοντέλου και τα αποτελέσματα να ζυγιστούν με βάση το πλήθος των μπλοκ.

Συνολικό τονάζ: $\Pi_K \cdot S^* \cdot SG$

όπου *SG* είναι το ειδικό βάρος, Π_K είναι το μέσο πάχος kriging και S^* είναι η εκτίμηση του εμβαδού με βάση τα θετικά μπλοκ μεταλλεύματος. Η ακρίβεια αυτής της εκτίμησης μπορεί και πάλι να καθοριστεί χρησιμοποιώντας τη θεωρία της διακύμανσης εκτίμησης.

Οι ημι-διαμετρικές διακυμάνσεις (*α* και *β*) για τα μπλοκ μεταλλεύματος σε κάθε επίπεδο ενός 3Δ μοντέλου μπλοκ μπορούν να συγκεντρωθούν και να χρησιμοποιηθούν στην τυπική εξίσωση για τη σχετική διακύμανση εκτίμησης περιοχής. Στην περίπτωση αυτή το S^* θα είναι το άθροισμα των περιοχών περιεκτικότητας μεταλλεύματος σε κάθε επίπεδο, $n\alpha_1\alpha_2$ όπου *n* είναι το πλήθος των μπλοκ στο επίπεδο και α_1 και α_2 οι διαστάσεις των μπλοκ στο επίπεδο.

Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού της συνολικής διακύμανσης εκτίμησης kriging, είναι να εκτελεστεί πολυγωνικό kriging στο οποίο εκτιμώνται ακανόνιστα σχήματα (σώματα μεταλλοφορίας) χρησιμοποιώντας ένα μεγάλο πλέγμα από σημεία εντός κάποιων επιβαλλόμενων ορίων. Έτσι η διαδικασία kriging περιλαμβάνει τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ δειγμάτων και ενός μεγάλου αριθμού από σημεία υποδιαίρεσης εντός ενός ακανόνιστου ορίου σε αντίθεση με μια σειρά από κανονικά μπλοκ. Οδηγούμαστε έτσι σε μια περιεκτικότητα και μια διακύμανση εκτίμησης κάτι που επιτρέπει τον υπολογισμό των ορίων εμπιστοσύνης 95% της εκτίμησης.

Υπολογισμός Ορίων Σώματος Μεταλλοφορίας με Kriging

Η διαδικασία kriging θα επιτρέψει τον καθορισμό των ορίων της μεταλλοφορίας που αξίζει να συμπεριληφθεί σε έναν ενδιάμεσο υπολογισμό πόρων για ένα ατελώς ορισμένο σώμα μεταλλοφορίας, δηλαδή για κάποιο στο οποίο το πρόγραμμα γεωτρήσεων δεν έχει ολοκληρωθεί (χαμηλή πυκνότητα) ειδικά στα περιθώρια ή είναι ανεπαρκές για τον καθορισμό των οικονομικών ορίων. Πολλά από τα πιθανά μπλοκ μεταλλεύματος δεν πρόκειται να εκτιμηθούν γιατί δεν ικανοποιούν το κριτήριο των τουλάχιστο 5 δειγμάτων εντός της περιοχής ανίχνευσης ενώ άλλα θα έχουν τόσο κακή διακύμανση εκτίμησης που θα πρέπει να αποκλειστούν από τους πόρους. Ο καθορισμός των γεωμετρικών ορίων του μεταλλεύματος βασίζεται καλύτερα στη σχετική διακύμανση kriging της συγκέντρωσης μετάλλου, $\sigma^2_{\Sigma M_K} / \Sigma M_K^2$, καθώς αυτή αντικατοπτρίζει το σφάλμα στην εκτίμηση της ποσότητας μετάλλου διαθέσιμου για εξόρυξη. Τα ανεκτά όρια σχετικής διακύμανσης kriging μπορούν να βασιστούν στην ταξινόμηση πόρων των Diehl και Davids (1982) όπως σχολιάζεται σε παρακάτω παράγραφο ή να επιλεγούν εξετάζοντας ένα διάγραμμα αθροιστικής συχνότητας των σχετικών διακυμάνσεων kriging όλων των μπλοκ μεταλλεύματος. Η εμφανιζόμενη διακοπή στις υψηλές τιμές μπορεί να ληφθεί ως το όριο. Η συγκέντρωση μετάλλου είναι αποφασιστικός παράγοντας στην επιλογή ενός μπλοκ ως μέρους των αποθεμάτων και πολλά μπλοκ θα αποτύχουν με βάση και αυτό το κριτήριο. Όπου το πάχος του μεταλλεύματος είναι μικρό, το φαινόμενο άκρων μπορεί να χειροτερέψει τη διακύμανση kriging της εκτίμησης περιεκτικότητας.

Καμπύλες Περιεκτικότητας-Τονάζ και Διακύμανσης-Τονάζ

Οι καμπύλες αυτές αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για τον μηχανικό μεταλλείων και το γεωλόγο καθώς, με μια ματιά, δείχνουν ακριβώς πόσο μετάλλευμα υπάρχει πάνω από κάποιο όριο εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας και πόσο από αυτό έχει περιεκτικότητα που εκτιμήθηκε με μεγάλο βαθμό ακρίβειας. Επιτρέπουν αλλαγές στο ελάχιστο όριο εκμεταλλευσιμότητας και την εκτίμηση των επιπτώσεων που θα έχουν οι αλλαγές αυτές στα αποθέματα.

Καμπύλες Περιεκτικότητας-Τονάζ

Η μέθοδος κατασκευής αυτών των καμπύλων θα αναλυθεί με βάση ένα κοίτασμα λατεριτικού χρυσού. Τα πάχη και οι συγκεντρώσεις μετάλλου για αυτό το κοίτασμα εκτιμήθηκαν με LK δυο διαστάσεων. Μόνο 33 μπλοκ έγιναν αποδεκτά για τους πόρους καθώς οι περιοχές ανίχνευσης όλων των άλλων περιείχαν λιγότερο από 4 δείγματα. Το εύρος των εκτιμήσεων περιεκτικότητας σε αυτό το κοίτασμα διαιρέθηκαν αρχικά σε 13 κλάσεις και στη συνέχεια οι περιεκτικότητες αυτές ταξινομήθηκαν σε αύξουσα σειρά σε έναν πίνακα. Μέρος του πίνακα αυτού δίνεται στον Πίνακα 8.1. Για τα μπλοκ εκείνα που βρίσκονται πάνω από το όριο χαμηλής κλάσης υψηλότερης περιεκτικότητας (2.7 g/t) αθροίζονται τα πάχη τους για τον υπολογισμό του τονάζ πάνω από αυτό το όριο (άθροισμα πάχους x εμβαδόν μπλοκ x ειδικό βάρος). Η τιμή αυτή, εκφραζόμενη ως ποσοστό των συνολικών πόρων των 1,255,188 τόνων, σχεδιάζεται στο κατώτερο όριο κλάσης για αυτό το διάστημα της υψηλότερης κλάσης (3.2% στο σημείο Α του Σχήματος 8.6).

Συγχρόνως υπολογίζεται το άθροισμα των γινόμενων εκτίμησης πάχους και περιεκτικότητας το οποίο στη συνέχεια διαιρείται δια του αθροίσματος του πάχους για να προκύψει μια ζυγισμένη με το τονάζ περιεκτικότητα (Πίνακας 8.2). Αυτή αποδίδεται στο σημείο Β του Σχήματος 8.6. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνδυάζοντας όλα τα μπλοκ πάνω από το επόμενο όριο κλάσης (2.5 g/t) για να πάρουμε τα σημεία Γ και Δ. Με επανάληψη για όλα το διαστήματα περιεκτικότητας φτάνουμε στο 100% των τόνων (Ε) και τη συνολική περιεκτικότητα (Ζ) ολόκληρου του κοιτάσματος στο κατώτατο όριο κλάσης (0.3 g/t). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συγκέντρωση εξετάζεται από την υψηλότερη κλάση περιεκτικότητας προς τα κάτω καθώς μας ενδιαφέρουν οι τιμές πάνω από τα όρια εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας. Τα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση αποτυπώνονται στα όρια χαμηλότερης κλάσης για κάθε κλάση περιεκτικότητας.

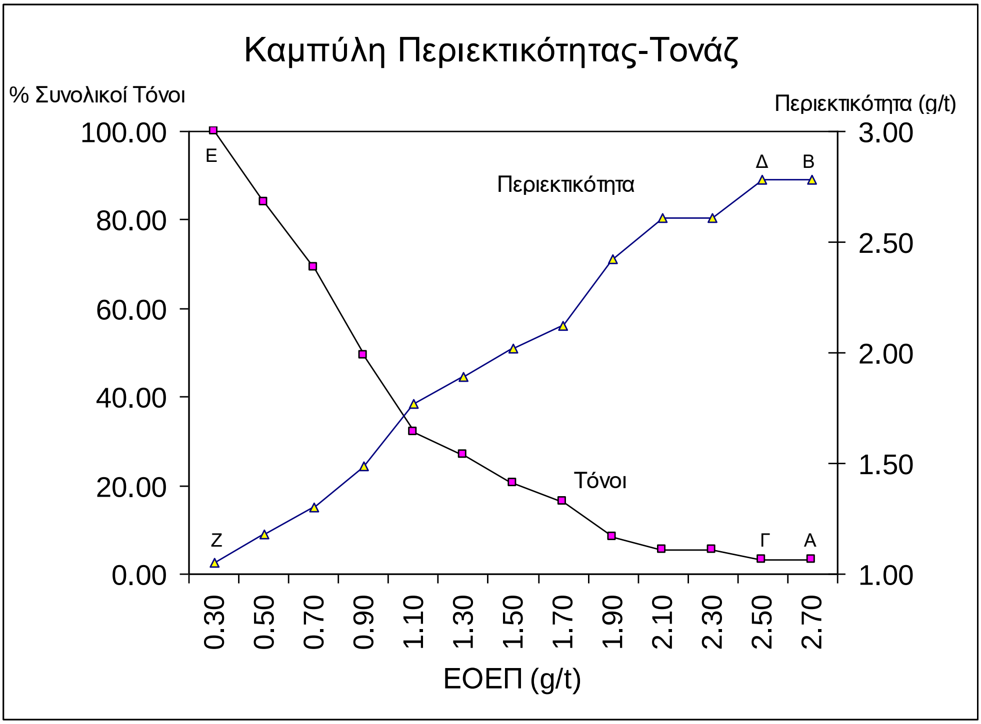
Πίνακας 8.1: Τιμές μπλοκ εκτιμήσεων kriging με σειρά περιεκτικότητας από κοίτασμα λατεριτικού χρυσού.

	Πάχος		Συγκέντρωση		Περιεκτικότητα Au		
Αρ. Μπλοκ	Εκτ.	Διακ.	Εκτ.	Διακ.	Εκτ.	Διακ.	Δείγματα
5	2.10	1.01	0.67	3.42	0.32	0.68	4
2	6.89	0.57	2.44	2.01	0.35	0.03	10
3	6.59	0.79	2.37	2.75	0.36	0.05	6
1	5.02	0.72	1.96	2.53	0.39	0.08	7
24	3.26	0.57	1.72	1.98	0.53	0.15	9
19	2.28	0.45	1.33	1.56	0.58	0.25	11
4	7.08	0.57	4.24	2.02	0.60	0.03	10
28	6.25	0.62	4.11	2.18	0.66	0.04	8
20	2.97	0.56	2.08	1.97	0.70	0.18	9
23	2.01	0.51	1.57	1.71	0.78	0.34	8
13	4.62	0.57	3.73	2.01	0.81	0.07	10
25	3.58	0.42	2.97	1.46	0.83	0.09	13
14	2.36	0.63	1.99	2.16	0.84	0.31	8

Πίνακας 8.2: Υπολογισμός τονάζ και περιεκτικοτήτων για καθορισμένα όρια εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας.

ΕΟΕΠ	Αθρ. Πάχους	% Τόνων	Άθροισμα ΣΜ	Ζυγ. Περιεκτικότητα
0.30	128.08	100.00	133.86	1.05
0.50	107.48	83.90	126.42	1.18
0.70	88.61	69.20	115.02	1.30
0.90	63.30	49.40	94.29	1.49
1.10	41.09	32.10	72.62	1.77
1.30	34.32	26.80	64.98	1.89
1.50	26.17	20.40	52.88	2.02
1.70	20.80	16.20	44.07	2.12
1.90	10.80	8.40	26.17	2.42
2.10	7.08	5.50	18.51	2.61
2.30	7.08	5.50	18.51	2.61
2.50	4.05	3.20	11.26	2.78
2.70	4.05	3.20	11.26	2.78

ΕΟΕΠ: Ελάχιστο Όριο Εκμεταλλεύσιμης Περιεκτικότητας



Σχήμα 8.6: Τυπική καμπύλη περιεκτικότητας-τονάζ.

Διαγράμματα όπως αυτό το Σχήματος 8.6 μας επιτρέπουν την ανάγνωση για ένα δοσμένο ΕΟΕΠ του τονάζ (ή του ποσοστού % του συνολικού τονάζ) πάνω από το όριο αυτό και επίσης της συνολικής περιεκτικότητας αυτού του υλικού. Παρόλα αυτά, το διάγραμμα αυτό είναι μόνο μια αρχική εκτίμηση της πραγματικής καμπύλης περιεκτικότητας-τονάζ που μπορεί να βρεθεί από τον παρακάτω τύπο:

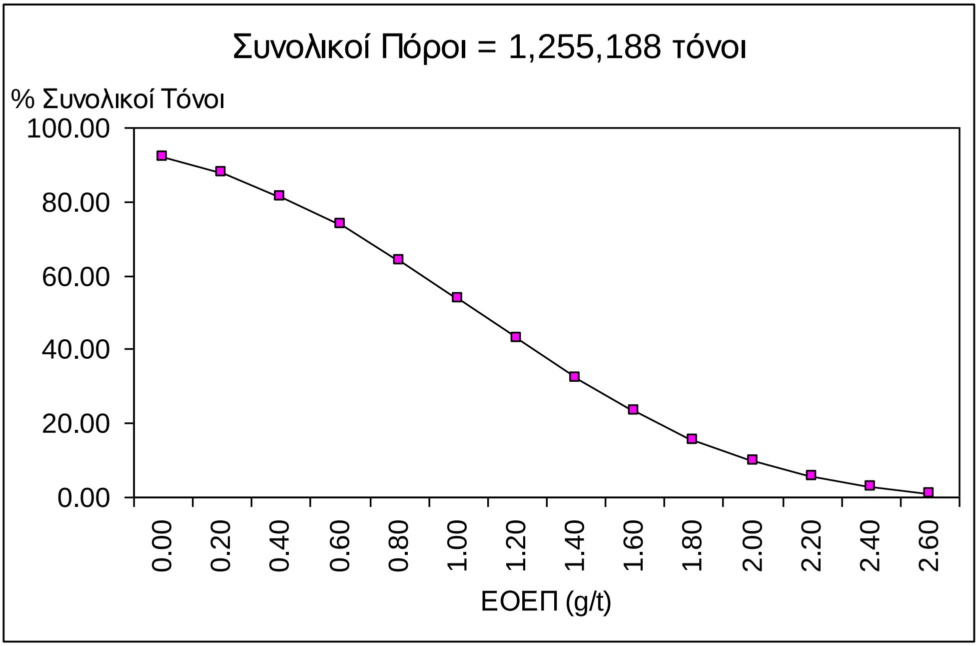
$$\sigma_B^2 = \sigma_{B^*}^2 + \sigma_{mk}^2$$ **Εξίσωση 8-52**

όπου σ^2_B είναι η διακύμανση της κατανομής των πραγματικών περιεκτικοτήτων των μπλοκ, $\sigma^2_{B^*}$ είναι η διακύμανση των εκτιμήσεων μπλοκ και σ^2_{mk} είναι ο μέσος των διακυμάνσεων εκτίμησης. Μπορούμε έτσι να σχεδιάσουμε μια νέα καμπύλη χρησιμοποιώντας τη νέα διακύμανση αλλά με την ίδια μέση περιεκτικότητα εκτιμήσεων kriging. Στη συνέχεια υπολογίζεται η περιοχή κάτω από την καμπύλη χρησιμοποιώντας τις τιμές εμβαδού για μια τυπική κανονική καμπύλη (Παράρτημα Γ) και τις τιμές 'Z' όπου:

$$Z = \frac{\text{όριο χαμηλότερης κλάσης} - \text{μέση εκτίμηση περιεκτικότητας}}{\text{τυπική απόκλιση εκτιμήσεων περιεκτικότητας}}$$

Πίνακας 8.3: Υπολογισμός πραγματικής καμπύλης περιεκτικότητας-τονάζ.

ΕΟΕΠ	"Z"	Εμβαδό	Εμβαδό Κλάσης	Αθρ. %
0.00	-1.47973	0.43052	0.04421	92.07
0.20	-1.20716	0.38631	0.06132	87.65
0.40	-0.93459	0.32499	0.07898	81.52
0.60	-0.66202	0.24601	0.09448	73.62
0.80	-0.38945	0.15153	0.10501	64.17
1.00	-0.11688	0.04652	0.10837	53.67
1.20	0.15569	0.06185	0.10392	42.83
1.40	0.42826	0.16577	0.09233	32.44
1.60	0.70083	0.25810	0.07672	23.21
1.80	0.97340	0.33482	0.05879	15.53
2.00	1.24597	0.39361	0.04195	9.66
2.20	1.51854	0.43556	0.02780	5.46
2.40	1.79111	0.46336	0.01711	2.68
2.60	2.06368	0.48047	0.00969	0.97
2.80	2.33625	0.49016		



Σχήμα 8.7: Πραγματική καμπύλη περιεκτικότητας-τονάζ.

Ο Πίνακας 8.3 δείχνει πως οι δυο παραπάνω τύποι μπορούν να εφαρμοστούν στο συγκεκριμένο κοίτασμα, αγνοώντας προσωρινά ότι οι περιεκτικότητες έχουν μεταβλητή στήριξη (πάχος). Κάθε τιμή ΕΟΕΠ γίνεται το κατώτερο όριο κλάσης στον υπολογισμό της τιμής 'Ζ'. Στην περίπτωση αυτή η μέση εκτίμησης περιεκτικότητας kriging ήταν 1.086 g/t, η μέση διακύμανση εκτίμησης 0.1784 $(g/t)^2$ και η διακύμανση των εκτιμήσεων μπλοκ 0.360 $(g/t)^2$. Επομένως η διακύμανση των πραγματικών περιεκτικοτήτων μπλοκ είναι 0.5384 $(g/t)^2$ και η τυπική απόκλιση 0.73376 g/t. Από την τελευταία καθορίστηκαν οι περιοχές κάτω από την τυπική κανονική καμπύλη μέσω του πίνακα στο Παράρτημα Γ και στη συνέχεια η περιοχή εντός κάθε διαστήματος κλάσης. Οι περιοχές αυτές αθροίστηκαν και εκφράστηκαν ως ποσοστό. Το Σχήμα 8.7 είναι ένα διάγραμμα της τιμής του ΕΟΕΠ έναντι αυτού του ποσοστού – πραγματική καμπύλη περιεκτικότητας-τονάζ.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στο Σχήμα 8.7 το ποσοστό του τονάζ πάνω από 0 g/t είναι μόνο 92.07% και όχι 100% όπως θα περίμενε κανείς. Το γεγονός αυτό δείχνει χαρακτηριστικά ένα από τα προβλήματα στην κατασκευή μιας πραγματικής καμπύλης περιεκτικότητας-τονάζ. Το πρόβλημα αυτό οφείλεται στο ότι ο πληθυσμός των δεδομένων είναι μικρός (33 μπλοκ) και στο ότι η κατανομή των εκτιμώμενων περιεκτικοτήτων μπλοκ είναι όχι μόνο θετικά λοξή αλλά και διακοπτόμενη στα 0.3 g/t. Αυτό οδηγεί σε μια μεγάλη τυπική απόκλιση. Έτσι ο μέσος μείον 2σ (1.4675) δίνει αρνητικές περιεκτικότητες για το 8% του πληθυσμού που λείπει. Είναι λοιπόν βασικό να έχουμε μια κανονική κατανομή στον πληθυσμό. Σε αυτό το παράδειγμα, ένας λογαριθμικός μετασχηματισμός των δεδομένων θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα ώστε να χρησιμοποιούνται οι λογάριθμοι των περιεκτικοτήτων ως ΕΟΕΠ (με τον αντίστροφο μετασχηματισμό τους) στην πραγματική καμπύλη περιεκτικότητας-τονάζ.

Το άλλο πρόβλημα που προσπεράσαμε νωρίτερα είναι ότι η στήριξη των περιεκτικοτήτων στο παράδειγμα μας είναι μεταβλητή. Η χρήση των περιεκτικοτήτων σε μια πραγματική καμπύλη περιεκτικότητας-τονάζ περιορίζεται ουσιαστικά σε περιεκτικότητες προερχόμενες από 3Δ μοντελοποίηση μπλοκ ενός κοιτάσματος όπου οι διαστάσεις των μπλοκ είναι σταθερές.

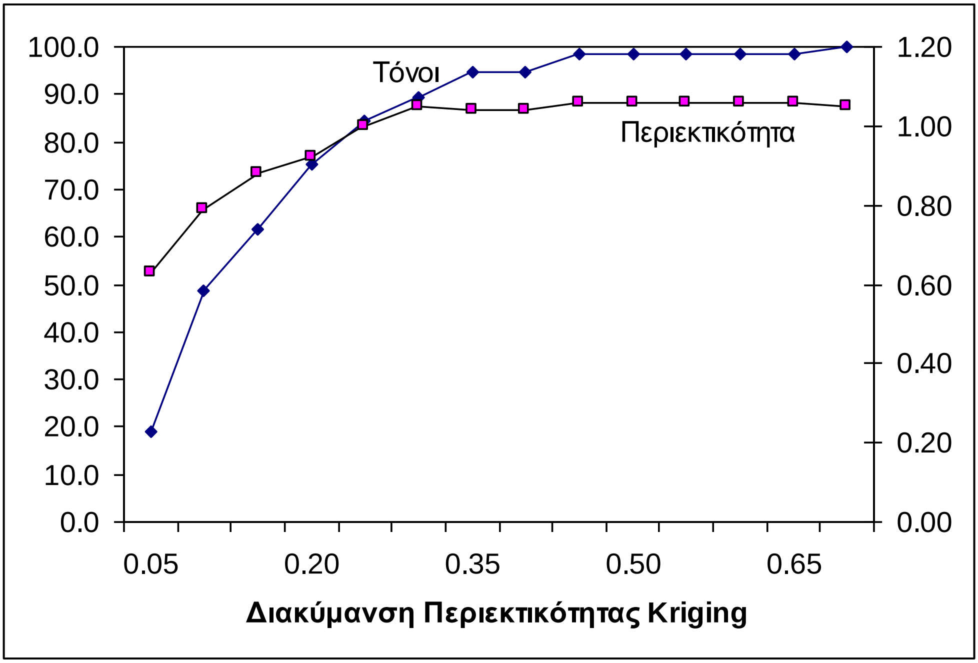
Καμπύλες Διακύμανσης-Τονάζ

Υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής πειραματικών καμπύλων για τις διακυμάνσεις περιεκτικότητας kriging έναντι του τονάζ (ή % τονάζ) και επίσης έναντι της μέσης περιεκτικότητας. Από αυτά τα διαγράμματα μπορούμε έτσι να εκτιμήσουμε τα τονάζ και τις μέσες περιεκτικότητες κάτω από συγκεκριμένες τιμές σ^2_K. Μπλοκ μεταλλεύματος με χαμηλές τιμές σ^2_K είναι καλά αποδεδειγμένα ενώ εκείνα με υψηλή σ^2_K είναι ελάχιστα γνωστά αποθέματα ή πόροι. Η μέθοδος αυτή μπορεί να αποτελέσει τη βάση μιας σωστά ορισμένης ταξινόμησης αποθεμάτων.

Αυτή τη φορά τα αποτελέσματα του kriging ταξινομούνται με βάση την αύξουσα σ^2_K και στη συνέχεια το εύρος του υποδιαιρείται σε κλάσεις ως προς την περιεκτικότητα (Πίνακας 8.4). Το εκτιμώμενο πάχος που σχετίζεται με κάθε τιμή σ^2_K κάτω από το υψηλότερο όριο κλάσης του πρώτου διαστήματος αθροίζεται και μετατρέπεται σε τόνους (ή ποσοστό επί του συνόλου του τονάζ). Οι τιμές Κ-Διακ. στον Πίνακα 8.4 είναι επομένως τα υψηλότερα όρια κλάσεων. Η τιμή αυτή του τονάζ σχεδιάζεται στο διάγραμμα (Σχήμα 8.8) σε θέση που αντιστοιχεί στο υψηλότερο όριο κλάσης (0.7 $(g/t)^2$). Αυτό επαναλαμβάνεται για όλα τα πάχη για διακυμάνσεις κάτω από το δεύτερο υψηλότερο όριο κλάσης μέχρι να καλυφθεί όλο το εύρος της διακύμανσης. Στην περίπτωση του συγκεκριμένου κοιτάσματος, φαίνεται ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό του τονάζ έχει καλή (χαμηλή) διακύμανση και ότι η περιεκτικότητα αυτών των μπλοκ είναι γενικά χαμηλή. Εμφανίζεται ελάχιστη μεταβολή στη συνολική περιεκτικότητα kriging πέρα από μια διακύμανση 0.3 $(g/t)^2$.

Πίνακας 8.4: Υπολογισμός τονάζ και περιεκτικοτήτων για συγκεκριμένες διακυμάνσεις kriging.

Κ-Διακ.	Αθρ. Πάχους	% Τόνοι	Άθρ. ΣΜ	Ζυγ. Περιεκτικότητα
0.05	24.27	18.9	15.41	0.63
0.10	62.44	48.8	49.15	0.79
0.15	78.72	61.5	69.19	0.88
0.20	96.49	75.3	88.73	0.92
0.25	107.99	84.3	107.60	1.00
0.30	114.32	89.3	120.19	1.05
0.35	121.41	94.8	126.77	1.04
0.40	121.41	94.8	126.77	1.04
0.45	125.98	98.4	133.19	1.06
0.50	125.98	98.4	133.19	1.06
0.55	125.98	98.4	133.19	1.06
0.60	125.98	98.4	133.19	1.06
0.65	125.98	98.4	133.19	1.06
0.70	128.08	100.0	133.86	1.05



Σχήμα 8.8: Καμπύλη περιεκτικότητας-τονάζ βασισμένη στη διακύμανση kriging.

Διακυμάνσεις Kriging και Ταξινόμηση Πόρων

Έχουμε δει ότι οι διακυμάνσεις kriging σχετίζονται με ξεχωριστά μπλοκ μεταλλεύματος και ότι αποδίδουν το πλήθος των δεδομένων που είναι διαθέσιμα εντός μιας ακτίνας ανίχνευσης αντίστοιχης του γεωστατιστικού εύρους γύρω από κάθε σημείο υποδιαίρεσης εντός των μπλοκ μεταλλεύματος. Επίσης αποδίδουν την κατανομή αυτών των δεδομένων εντός της περιοχής ανίχνευσης και τη φύση ή τη συνέχεια της μεταλλοφορίας. Έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της ακρίβειας της εκτίμησης κάθε μπλοκ. Για την ανάπτυξη ενός γενικού συστήματος ταξινόμησης είναι απαραίτητο να εκφραστεί η ακρίβεια αυτή ως σχετική διακύμανση kriging ή σχετική τυπική απόκλιση kriging ώστε το σφάλμα να σχετίζεται άμεσα με τη μέση περιεκτικότητα η οποία μεταβάλλεται από μπλοκ σε μπλοκ ή από κοίτασμα σε κοίτασμα. Θα πρέπει να γίνει κατανοητό, όμως, ότι η ακρίβεια στηριζόμενη αποκλειστικά στο kriging δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι αντικατοπτρίζει τα απόλυτα όρια εμπιστοσύνης για την εκτίμηση μπλοκ καθώς δεν λαμβάνονται υπόψη κάποια θέματα ποιότητας δεδομένων από τις υπάρχουσες μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα, δεν εξετάζεται το ποσοστό απόληψης δείγματος ή πυρήνα.

Παράρτημα Α – Επιπρόσθετη Μελέτη

Ο παρακάτω κατάλογος δεν είναι πλήρης, αλλά περιλαμβάνει μερικά βασικά βιβλία στατιστικής και γεωστατιστικής. Όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να αναφερθούν και στην πιο πλήρη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου.

Βιβλία Γεωστατιστικής

Agterberg, FP, 1974. Geomathematics. *Developments in geomathematics 1*. Elsevier (Amsterdam)

Armstrong, M, 1998. Basic Linear Geostatistics. Springer-Verlag (Berlin).

Bonham-Carter, G and Cheng, Q, (Eds), 2008. Progress in Geomathematics. Springer-Verlag (Berlin).

Clark, I, 1979. Practical Geostatistics. Elsevier (Amsterdam).

David, M, 1977. Geostatistical Ore Reserve Estimation. *Developments in geomathematics 2.* Elsevier (Amsterdam).

David, M, 1988. Handbook of Applied Advanced Geostatistical Ore Reserve Estimation. *Developments in geomathematics 6*. Elsevier (Amsterdam).

Deutsch, CV and Journel, AG, 1992. GSLIB Geostatistical Software Library and User's Guide. Oxford University Press (New York).

Goovaerts, P, 1997. Geostatistics for Natural Resources Evaluation. *Applied Geostatistics Series.* Oxford University Press (New York).

Gy, PM, 1979. Sampling of Particulate Materials Theory and Practice. *Developments in geomathematics 4.* Elsevier (Amsterdam).

Hohn, ME, 1988. Geostatistics and Petroleum Geology. Van Nostrand Reinhold (New York).

Isaaks, EH, and Srivastava, RM, 1989. An Introduction to Applied Geostatistics. Oxford University Press (New York).

Journel, AG and Huijbregts, ChJ, 1978. Mining Geostatistics. Academic Press (London).

Journel, AG and Kyriakides, PC, 2004. Evaluation of Mineral Reserves – A Simulation Approach. Applied Geostatistics Series, Oxford University Press (New York).

Kitanidis, PK, 1997. Introduction to Geostatistics – Applications to Hydrogeology. Cambridge University Press (Cambridge).

Lantuéjoul, C, 2002. Geostatistical Simulation – Models and Algorithms. Springer-Verlag (Berlin).

Mallet, JL, 2002. Geomodelling. Applied Geostatistics Series, Oxford University Press (New York).

Pan, G and Harris, DP, 2000. Information Synthesis for Mineral Exploration. Spatial Information Systems, Oxford University Press (New York).

Rossi, M and Deutsch, CV, 2014. Mineral Resource Estimation, Springer (Dordrecht).

Webster, R and Oliver, MA, 1990. Statistical Methods in Soil and Land Resource Survey. Oxford University Press (New York).

Βιβλία Στατιστικής στις Γεωεπιστήμες

Clark, WAV and Hosking, PL, 1986. Statistical methods for geographers. John Wiley & Sons (New York).

Davis, JC, 1986. Statistics and data analysis in geology (2nd edition). John Wiley & Sons (New York).

Freund, JE and Walpole, RE, 1980. Mathematical statistics (3rd edition). Prentice Hall (New Jersey).

Koch, GS and Link, RF, 1971. Statistical analysis of geological data. Dover (New York).

Παράρτημα Β – Κώδικας Αναφοράς Αποτελεσμάτων Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων

Το κείμενο αυτό αποτελεί μετάφραση του Κώδικα Αναφοράς που επεξεργάστηκε η Ομάδα Εργασίας για Ορυκτούς Πόρους και Αποθέματα του Ινστιτούτου Υλικών, Ορυκτών και Μεταλλευτικής σε συνεργασία με την Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Γεωλόγων, τον Σύλλογο Γεωλογίας του Λονδίνου και το Ινστιτούτο Γεωλόγων της Ιρλανδίας (Institution of Mining and Metallurgy, 2001). Οι παραπάνω οργανισμοί δεν φέρουν καμία ευθύνη για τη μεταφορά του κειμένου στην Ελληνική γλώσσα.

Εισαγωγή

1. Ο Κώδικας Αναφοράς Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων (ο ‘Κώδικας Αναφοράς’ ή ‘ο Κώδικας’) ορίζει ελάχιστα πρότυπα, συστάσεις και οδηγίες για Δημόσια Αναφορά Αποτελεσμάτων Έρευνας Ορυκτών Πόρων, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων στο Ηνωμένο Βασίλειο, την Ιρλανδία και την Ευρώπη. Αρχικά σχεδιάστηκε από την Ομάδα Εργασίας για Ορυκτούς Πόρους και Αποθέματα του πρώην Ινστιτούτου Μεταλλευτικής και Μεταλλουργίας (IMM), και πλέον Ινστιτούτου Υλικών, Ορυκτών και Μεταλλευτικής (Institute of Materials, Minerals & Mining, IMMM), η οποία δημιουργήθηκε το 1999 για να παράγει έναν σύγχρονο Κώδικα σε ανταπόκριση παρόμοιων κινήσεων σε άλλες χώρες. Τον Ιούλιο του 2000 συμφωνήθηκε η επέκταση της άσκησης σε συνεργασία με την Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Γεωλόγων (European Federation of Geologists, EFG), τον Σύλλογο Γεωλογίας του Λονδίνου (Geological Society of London, GSL) και του Ινστιτούτου Γεωλόγων της Ιρλανδίας (Institute of Geologists of Ireland, IGI).
   Τον Δεκέμβριο το 1991, το Συμβούλιο του IMM ενέκρινε νέους ορισμούς ορυκτών πόρων και αποθεμάτων. Αυτοί εμφανίστηκαν επίσης σε μια ελαφρά τροποποιημένη μορφή στους Κανονισμούς Αναφοράς του Χρηματιστηρίου του Λονδίνου (Κεφάλαιο 19 – Μεταλλευτικές Εταιρείες).
   Από το 1994, το Συμβούλιο Ινστιτούτων Μεταλλευτικής και Μεταλλουργίας (Council of Mining and Metallurgical Institutions, CMMI) εργαζόταν για τη δημιουργία μιας ομάδας πρότυπων διεθνών ορισμών για την αναφορά Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων, στη βάση του ήδη υπάρχοντος Κώδικα JORC (Australasian Code for Reporting of Mineral Resources and Ore Reserves). Δημιουργήθηκε μια ανεπίσημη Επιτροπή Διεθνών Προτύπων Αναφοράς Ορυκτών Πόρων/Αποθεμάτων του CMMI (Mineral Resources/Reserves International

Reporting Standards Committee, CMMI – CRIRSCO), με εκπροσώπους από μεταλλευτικά και μεταλλουργικά ινστιτούτα των Ηνωμένων Πολιτειών (SME), την Αυστραλία (AusIMM - JORC), τον Καναδά (CIM), το Ηνωμένο Βασίλειο (IMM, και πλέον το IMMM) και τη Νότια Αφρική (SAIMM). Παράλληλα, και από το 1992, η Οικονομική Επιτροπή του ΟΗΕ για την Ευρώπη (UN-ECE) ανέπτυσσε ένα Διεθνές Πλαίσιο για την Ταξινόμηση Αποθεμάτων/ Πόρων – Στερεών Καυσίμων και Ορυκτών (UNFC). Το 1997, το CMMI - CRIRSCO κατέληξε σε μια προκαταρτική συμφωνία (η συμ-φωνία του Ντένβερ) ως προς τους ορισμούς Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων. Σε κοινή συνάντηση στη Γενεύη το 1998 μεταξύ των CMMI – CRIRSCO και της Ομάδας Εργασίας UN-ECE συμφωνήθηκε να συμπεριληφθούν οι πρότυποι ορισμοί αναφοράς Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων του CMMI – CRIRSCO στο UNFC, δίνοντας έτσι πραγματικά διεθνές χαρακτήρα στους ορισμούς του CMMI – CRIRSCO.

Ως αποτέλεσμα της πρωτοβουλίας του CMMI, πραγματοποιήθηκαν σημαντικά βήματα ανάπτυξης προς τη δημιουργία ξεκάθαρων προ-τύπων αναφοράς για Ορυκτούς Πόρους και Ορυκτά Αποθέματα. Σε αυτά περιλαμβάνονται η έκδοση ανανεωμένων εκδόσεων του Κώδικα JORC στην Αυστραλία το 1996 και 1999, ακολουθούμενη από την έκδοση παρόμοιων Κωδικών και Οδηγιών από τους επαγγελματικούς οργανισμούς στη Νότια Αφρική, τις ΗΠΑ, τον Καναδά, το Ηνωμένο Βασίλειο, την Ιρλανδία και την Ευρώπη.

Η ομοιότητα των κωδικών και οδηγιών αναφοράς σε αυτές τις χώρες που εκπροσωπούνται από το CMMI έχουν πλέον φτάσει σε σημείο που επιδιώκεται η ανάπτυξη ενός Διεθνούς Κώδικα. Αυτός ο Κώδικας Αναφοράς είναι σε συμφωνία με αυτές τις διεθνείς εξελίξεις και θα επανεξετάζεται κατά διαστήματα όπως απαιτείται. Υπάρχουν τρεις επιπρόσθετες κατηγορίες στο UNFC που δεν χρησιμοποιούνται από αυτόν τον Κώδικα Αναφοράς. Αυτές αφορούν ιδιαίτερα σκοπούς κυβερνητικού σχεδιασμού, που θα συμπεριλάμβαναν τη μελλοντική χρήση γης ή τον στρατηγικό σχεδιασμό ορυκτών αποθεμάτων. Δεν είναι σκόπιμη η χρήση αυτών των κατηγοριών από μη-κυβερνητικές επενδύσεις και αποφάσεις χρηματοδότησης. Αυτές οι επιπρόσθετες κατηγορίες UNFC περιλαμβάνονται εντελώς πληρο-φοριακά στο Παράρτημα 1 αυτού του Κώδικα.

2. Αυτή η πρώτη έκδοση του Κώδικα Αναφοράς αντικαθιστά τους Ορισμούς Αποθεμάτων και Πόρων του 1991 που εγκρίθηκαν από το Συμβούλιο του Ινστιτούτου Μεταλ-λευτικής και Μεταλλουργίας (IMM), και ήταν σε γενική χρήση στο Ηνωμένο Βασίλειο και την Ιρλανδία. Τα άρθρα του Κώδικα Αναφοράς ακολουθούνται από Οδηγίες, που δεν αποτελούν τμήμα του Κώδικα, αλλά έχουν ως σκοπό την παροχή βοήθειας και καθοδήγησης στους αναγνώστες κατά την ερμηνεία του Κώδικα. Οι Ορισμοί του Κώδικά δίνονται με έντονα γράμματα. Οι

Οδηγίες δίνονται με πλάγια γράμματα και σε ξεχωριστές παραγράφους. Η ίδια μορφοποίηση εφαρμόστηκε στον Πίνακα 1, ο οποίος αποτελεί μέρος των Οδηγιών. Στο κείμενο του Κώδικα η χρήση του ενικού μπορεί να εκπροσωπεί και τον πληθυντικό και η αναφορά σε ένα γένος να περιλαμβάνει και τα δυο. Οι γενικοί όροι που χρησιμοποιούνται σε αυτόν τον κώδικα, οι ισοδύναμοι τους όροι και η επιδιωκόμενη χρήση τους δίνονται στο Παράρτημα 2.

3. Ο Κώδικας υιοθετήθηκε από το Ινστιτούτο Υλικών, Ορυκτών και Μεταλλευτικής (IMMM), την Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Γεωλόγων (EFG), τον Σύλλογο Γεωλογίας του Λονδίνου (GSL) και το Ινστιτούτο Γεωλόγων της Ιρλανδίας (IGI), και είναι επομένως υποχρεωτικός και για τα επιμέρους μέλη τους.

Σκοπός

4. Οι βασικές αρχές που καθορίζουν τη λειτουργία και εφαρμογή του Κώδικά Αναφοράς είναι η διαφάνεια, η σχετικότητα και η δυναμικότητα. Η διαφάνεια απαιτεί ότι στον αναγνώστη μιας Δημόσιας Αναφοράς παρέχονται επαρκείς, ξεκάθαρες και συγκεκριμένες πληροφορίες για την κατανόηση της Δημόσιας Αναφοράς και ότι δεν παραπλανάται. Η σχετικότητα απαιτεί ότι μια Δημόσια Αναφορά περιέχει όλες τις πληροφορίες που λογικά θα απαιτούσαν και θα περίμεναν να βρουν οι επενδυτές και οι επαγγελματικοί σύμβουλοι τους στη Δημόσια Αναφορά, για τους σκοπούς της λήψης μιας ισορροπημένης και λογικής απόφασης ως προς τη μεταλλοφορία που αναφέρεται. Η δυναμικότητα απαιτεί ότι η Δημόσια Αναφορά βασίζεται στην εργασία ενός υπεύθυνου και έμπειρου ατόμου με κατάλληλα προσόντα που υπόκειται σε έναν επιβαλλόμενο επαγγελματικό Κώδικα Ηθικής ή Κανόνες Λειτουργίας.

5. Ο Κώδικας είναι εφαρμοστέος σε όλα τα στερεά ορυκτά για τα οποία μπορεί να απαιτείται Δημόσια Αναφορά Αποτελεσμάτων Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων, συμπεριλαμβανομένων των μετάλλων, των πολύτιμων λίθων, μαζικών υλικών όπως ο γαιάνθρακας και ο ορυκτός σίδηρος, τα βιομηχανικά ορυκτά, οι πέτρες και τα λατομικά υλικά. Οδηγίες ειδικές ως προς συγκεκριμένα ορυκτά μπορούν να αναπτύσσονται κατά καιρούς και να ακολουθούνται μαζί με τον Κώδικα για να βοηθήσουν την ερμηνεία του. Τέτοιες οδηγίες δεν θα υπερέχουν του Κώδικα.

6. Ο Κώδικας ορίζει το **ελάχιστο** πρότυπο για Δημόσια Αναφορά. **Αναφορά στον Κώδικα σε μια Δημόσια Αναφορά αφορά οποιαδήποτε αναφορά σε Αποτελέσματα Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων προετοιμασμένη για τον σκοπό (α) της πληροφόρησης των επενδυτών ή πιθανών επενδυτών και των συμβούλων τους ή (β) την ικανοποίηση νομοθετικών απαιτήσεων.** Οι εταιρείες ενθαρρύνονται να παρέχουν πληροφορίες που είναι όσο το δυνατό πιο ολοκληρωμένες στις Δημόσιες Αναφορές τους.

Στις Δημόσιες Αναφορές περιλαμ-βάνονται, χωρίς να περιορίζονται μόνο στα παρακάτω: ετήσιες εταιρικές αναφορές, αναφορές τετραμήνου και άλλες αναφορές προς τα χρηματιστήρια ή όπως απαιτείται από το νόμο. Ο Κώδικας επίσης εφαρμόζεται σε όλες τις δημόσια εκδιδόμενες πληροφορίες συμπερι-λαμβανομένων δελτίων πληροφο-ριών, ειδήσεων, υλικού ιστοσελίδων στο διαδίκτυο, αναφορές εμπειρο-γνωμοσύνης και τεχνικά άρθρα σχετικά με Αποτελέσματα Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων.

Παρόλο που έχει γίνει κάθε προσπάθεια στον Κώδικα και τις Οδηγίες για να καλυφθούν οι περισσότερες περιπτώσεις που είναι πιθανό να υπάρξουν στη Δημόσια Αναφορά Αποτελεσμάτων Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων, θα υπάρξουν περιπτώσεις όπου θα υπάρχει αμφιβολία ως προς την κατάλληλη διαδικασία που θα πρέπει να ακολουθηθεί. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι χρήστες του Κώδικα και εκείνοι που ετοιμάζουν αναφορές με βάση τον Κώδικα θα πρέπει να οδηγηθούν από την πρόθεση του. Αυτή είναι η παροχή ενός ελάχιστου πρότυπου για τη Δημόσια Αναφορά και η βεβαίωση ότι τέτοια αναφορά θα περιέχει όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται και περιμένουν να βρουν στην αναφορά οι επενδυτές και οι σύμβουλοι τους για τον σκοπό της λήψης μιας ισορροπημένης και λογικής απόφασης σχετικά με την αναφερόμενη μεταλλοφορία.

Ο Πίνακας 1, ο οποίος περιλαμβάνεται στο τέλος του Κώδικα, παρέχει ένα σχεδιάγραμμα με εκείνα τα αντικείμενα που θα πρέπει να θεωρηθούν όταν εκτιμάται ένα έργο. Η σημαντικότητα του κάθε αντικειμένου θα μεταβάλλεται με το συγκεκριμένο έργο και αναγνωρίζεται ότι, για ορισμένα έργα, κάποια άλλα αντικείμενα μπορεί να είναι σχετικά που δεν δίνονται στον Πίνακα. Ο Πίνακας 1 θα πρέπει να θεωρηθεί ως ένας οδηγός για την ανάπτυξη μιας λογικής και ισορροπημένης προ-σέγγισης στην αναφορά. Παρόλα αυτά, πολλές αποφάσεις, όπως η ταξινόμηση υλικών όπως οι Ορυκτοί Πόροι και τα Ορυκτά Αποθέματα, παραμένουν αντικείμενο επαγγελ-ματικής κρίσης στηριζόμενη στη γνώση, την εμπειρία και τις βιομηχανικές πρακτικές.

Απαιτείται η δημοσίευση στο κοινό εκείνων των αντικειμένων του Πίνακα 1 που είναι πιο πιθανό να επηρεάσουν την ακρίβεια των εκτιμήσεων που γίνονται στην αναφορά. Οι συντάκτες των αναφορών θα πρέπει να αναγνωρίζουν και να εκτιμούν αυτούς τους σημαντικούς παράγοντες στις αναφορές τους.

Η εκτίμηση Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων υπόκειται φυσικά σε κάποια επίπεδα αβεβαιότητας και ανακρίβειας. Μπορεί να χρειάζονται ιδιαίτερα προσόντα και εμπειρία για την ερμηνεία τμημάτων πληροφοριών, όπως γεωλογικοί χάρτες και *αναλυτικά αποτελέσματα, τα οποία συνήθως αντιπροσωπεύουν μόνο ένα μικρό μέρος του σώματος μεταλλοφορίας. Η αβεβαιότητα στις εκτιμήσεις θα πρέπει να αναλύεται στις αναφορές και να αντικατοπτρίζεται στην κατάλληλη επιλογή κατηγοριών Ορυκτών Αποθεμάτων και Ορυκτών Πόρων. Τα επίπεδα εμπιστοσύνης καλύπτονται από τον Κώδικα στα Άρθρα 21 και 28.*

Αρμοδιότητα και Υπευθυνότητα

7. Τεκμηρίωση που δίνει λεπτομέρειες Αποτελεσμάτων Έρευνας, Εκτιμήσεων Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων από την οποία παράγεται μια Δημόσια Αναφορά, θα πρέπει να προετοιμάζεται από ή υπό τη διεύθυνση, και υπογεγραμμένη από, ένα Αρμόδιο Πρόσωπο.
8. Μια Δημόσια Αναφορά σχετική με τα Αποτελέσματα Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και/ή Ορυκτών Αποθεμάτων μιας εταιρείας είναι ευθύνη της εταιρείας μέσω του Συμβουλίου των Διευθυντών της. Κάθε τέτοια αναφορά θα πρέπει να βασίζεται και να αντικατοπτρίζει σε ικανοποιητικό βαθμό μια εκτίμηση Ορυκτών Πόρων και/ή Ορυκτών Αποθεμάτων και τη σχετική τεκμηρίωση που προετοιμάστηκε από ένα Αρμόδιο Πρόσωπο. Μια εταιρεία που εκπονεί μια Δημόσια Αναφορά θα πρέπει να δημοσιοποιεί το όνομα του Αρμόδιου Προσώπου, τα προσόντα του, τις επαγγελματικές διασυνδέσεις του και τη σχετική εμπειρία όταν απαιτείται. Απαιτείται η γραπτή έγκριση του Αρμόδιου Προσώπου για εκείνα τα τμήματα της εργασίας του που περιλαμβάνονται στην αναφορά.

   Όπου περιλαμβάνεται στη Δημόσια Αναφορά ολόκληρη ή μέρος άλλης αναφοράς, θα πρέπει να λαμβάνεται η έγγραφη έγκριση του συντάκτη της αναφοράς ως προς τη μορφή και το περιεχόμενο με το οποίο περιλαμβάνεται η συγκεκριμένη αναφορά.
9. **Το ‘Αρμόδιο Πρόσωπο’ είναι ένα πρόσωπο που αποτελεί επιχειρηματικό μέλος ενός αναγνωρισμένου επαγγελματικού οργανισμού σχετικού με τη δραστηριότητα που αναπτύσσεται, και με επιβαλλόμενους Κανόνες Λειτουργίας. Ένα Αρμόδιο Πρόσωπο πρέπει να έχει το ελάχιστο πέντε (5) έτη εμπειρίας σχετικής με το είδος της μεταλλοφορίας και τον τύπο του κοιτάσματος που εξετάζεται και ως προς τη δραστηριότητα που πρόκειται να εκτελέσει. Εάν το Αρμόδιο Πρόσωπο εκτιμά ή επιβλέπει την εκτίμηση Ορυκτών Πόρων, η σχετική εμπειρία θα πρέπει να είναι στην εκτίμηση, εξέταση και αξιολόγηση Ορυκτών Πόρων. Εάν το Αρμόδιο Πρόσωπο εκτιμά ή επιβλέπει την εκτίμηση Ορυκτών Αποθεμάτων, η σχετική εμπειρία θα πρέπει να είναι στην εκτίμηση, εξέταση και αξιολόγηση Ορυκτών Αποθεμάτων.**

   Το βασικό κριτήριο στον ορισμό ενός Αρμόδιου Προσώπου είναι η λέξη ‘σχετική’. Ο καθορισμός του τι αποτελεί σχετική εμπειρία μπορεί να είναι δύσκολος και θα πρέπει να *βασιστεί στην κοινή λογική. Για παράδειγμα, στην εκτίμηση μεταλλοφορίας φλεβικού χρυσού, η εμπειρία σε μεταλλοφορίες υψηλού ψήγματος, φλεβικού τύπου όπως κασσίτερου, ουράνιου κλπ. είναι μάλλον σχετική, ενώ εμπειρία σε ογκώδη κοιτάσματα μάλλον όχι. Ως δεύτερο παράδειγμα, για να θεωρηθεί κανείς αρμόδιος στην εκτίμηση και αναφορά αλλουβιακών κοιτασμάτων χρυσού, θα πρέπει να έχει σημαντική εμπειρία σε αυτού του τύπου τη μεταλλοφορία εξαιτίας των χαρακτηριστικών του χρυσού σε αλλουβιακά συστήματα, του μεγέθους των σωματιδίων στο ίζημα, και των χαμηλών περιεκτικοτήτων που εκτιμώνται. Εμπειρία σχετική με κοιτάσματα που περιέχουν ορυκτά άλλα εκτός του χρυσού μπορεί να μην προσθέτει ουσιαστικά στην απαιτούμενη εμπειρία.*

Η λέξη κλειδί 'σχετική' σημαίνει επίσης ότι δεν είναι πάντα απαραίτητο για ένα πρόσωπο να έχει πέντε χρόνια εμπειρία σε κάθε τύπο κοιτάσματος για να μπορεί να είναι το Αρμόδιο Πρόσωπο εάν το πρόσωπο αυτό έχει σχετική εμπειρία σε άλλους τύπους κοιτασμάτων. Για παράδειγμα, ένα πρόσωπο με εικοσιπέντε χρόνια εμπειρία στην εκτίμηση Ορυκτών Πόρων σε μια ποικιλία τύπων μεταλλικών κοιτα-σμάτων μπορεί να μην χρειάζεται πέντε χρόνια ειδικής εμπειρίας σε κοιτάσματα πορφυρικού χαλκού ώστε να δρα ως Αρμόδιο Πρόσωπο. Η σχετική εμπειρία στους άλλους τύπους κοιτασμάτων θα μετρούσε προς την απαιτούμενη εμπειρία σχετική με τα κοιτάσματα πορφυρικού χαλκού .

Εκτός από την εμπειρία στο είδος της μεταλλοφορίας, ένα Αρμόδιο Πρόσωπο που αναφέρει Ορυκτούς Πόρους θα πρέπει να έχει επαρκή γνώση τεχνικών δειγματοληψίας και ανάλυσης σχετικών με το υπό εξέταση κοίτασμα ώστε να γνωρίζει πιθανά προβλήματα που μπορεί να επηρεάσουν την αξιοπιστία των δεδομένων. Κάποια γενική γνώση των τεχνικών εξόρυξης και επεξεργασίας που εφαρμόζονται στο συγκεκριμένο τύπο κοιτάσματος είναι επίσης σημαντική.

Ως γενικός κανόνας, τα άτομα που καλούνται να υπογράψουν ως Αρμόδιο Πρόσωπο θα πρέπει να είναι βέβαια ότι θα μπορούν να αντιμετωπίσουν τους συναδέλφους τους και να επιδείξουν ικανότητα στο ορυκτό, τον τύπο του κοιτάσματος και την περίπτωση που εξετάζεται. Εάν υπάρχει αμφιβολία, το πρόσωπο θα πρέπει να αναζητήσει τη συμβουλή κατάλληλα έμπειρων συναδέλφων ή να αρνηθεί να λειτουργήσει ως Αρμόδιο Πρόσωπο.

Η εκτίμηση Ορυκτών Πόρων μπορεί να είναι μια ομαδική προσπάθεια (για παράδειγμα, που περιλαμβάνει ένα πρόσωπο ή ομάδα που συλλέγει τα δεδομένα και ένα άλλο πρόσωπο ή ομάδα που προετοιμάζει την εκτίμηση Ορυκτών Πόρων). Η εκτίμηση Ορυκτών Αποθεμάτων είναι πολύ συχνά μια ομαδική προσπάθεια που περιλαμβάνει έναν αριθμό από τεχνικές επιστήμες. Το

Αρμόδιο Πρόσωπο που υπογράφει την αναφορά είναι υπεύθυνο και αρμόδιο για ολόκληρη την αναφορά υπό τον Κώδικα. Παρόλα αυτά, συνιστάται ότι, όπου υπάρχει σαφής διαχωρισμός ευθυνών εντός μιας ομάδας, κάθε πρόσωπο και η συνεισφορά του θα πρέπει να αναγνωρίζεται, και θα πρέπει να αποδέχεται την ευθύνη για τη συγκεκριμένη συνεισφορά. Για παράδειγμα, ένα πρόσωπο μπορεί να αποδεχθεί την ευθύνη για τη συλλογή των δεδομένων για τους πόρους, ένα άλλο για τη διαδικασία εκτίμησης πόρων, ένα άλλο για τη μεταλλευτική μελέτη, και ο προϊστάμενος του έργου μπορεί να αποδεχθεί την ευθύνη για τη συνολική αναφορά. Είναι σημαντικό το Αρμόδιο Πρόσωπο που αποδέχεται την ευθύνη για μια αναφορά Ορυκτών Πόρων ή Ορυκτών Αποθεμάτων που προετοιμάστηκε εξολοκλήρου ή εν μέρει από άλλους να κάνει αποδεκτή την εργασία των άλλων συνεισφερόντων.

Το Αρμόδιο Πρόσωπο που αναλαμβάνει και υπογράφει την αναφορά Ορυκτών Πόρων ή Ορυκτών Αποθεμάτων θα πρέπει να αποδέχεται πλήρη ευθύνη για την αναφορά και δεν θα πρέπει να αντιμετωπίζει τη διαδικασία αυτή ως απλά μια τυπική σφράγιση εγγράφου. Ιδιαίτερα, εάν το Αρμόδιο Πρόσωπο δεν είναι εντελώς υπεύθυνο για την παραγωγή των εκτιμήσεων πόρων ή αποθεμάτων, θα πρέπει να πάρει κάποια λογικά βήματα για να βεβαιώσει ότι κατανοεί πλήρως όλη την εργασία εκτίμησης, συμπερι-λαμβανομένων επισκέψεων στο εργοτάξιο και προσωπική επικύρωση των δεδομένων. Δεν θα πρέπει να εξαρτάται εντελώς από τη γνώμη των άλλων.

Ο Κώδικας πρέπει να διαβάζεται σε συνδυασμό με έναν Επαγγελματικό Κώδικα Ηθικής ή Κανονισμού Λειτουργίας και Οδηγιών που εκδίδονται από τον οργανισμό του οποίου επαγγελματικό μέλος είναι το Αρμόδιο Πρόσωπο.

Αναγνωρισμένα επαγγελματικά ινστι-τούτα με επιβαλλόμενους Επαγγελ-ματικούς Κώδικες Ηθικής ή Κανο-νισμούς Λειτουργίας που ακολουθούν αυτόν τον Κώδικα Αναφοράς είναι τα IMMM, EFG, GSL και IGI, και άλλα που θα προστεθούν εν καιρώ.

Οι Κανονισμοί Λειτουργίας θα πρέπει να ικανοποιούν τις απαιτήσεις και τις οδηγίες που δίνονται στο Παράρτημα Β3.

Αποτυχία στην ακολουθία των προτύπων επαγγελματικής συμπεριφοράς όπως καθορίζονται από τους σχετικούς Επαγγελματικούς Κώδικες Ηθικής ή τους Κανονισμούς Λειτουργία και τις Οδηγίες μπορεί να οδηγήσει σε πειθαρχική ενέργεια και, σε ορισμένες περιπτώσεις, στην αποβολή από το συγκεκριμένο ινστιτούτο. Παράπονα που γίνονται σχετικά με την επαγγελματική δραστηριότητα ενός Αρμόδιου Προσώπου θα εξετάζονται ως προς τους όρους του Επαγγελματικού Κώδικα Ηθικής ή του Κανονισμού Λειτουργίας και των Οδηγιών του *ινστιτούτου του οποίου μέλος είναι το Αρμόδιο Πρόσωπο, και θα αντιμετωπίζονται από τις σχετικές πειθαρχικές διαδικασίες.*

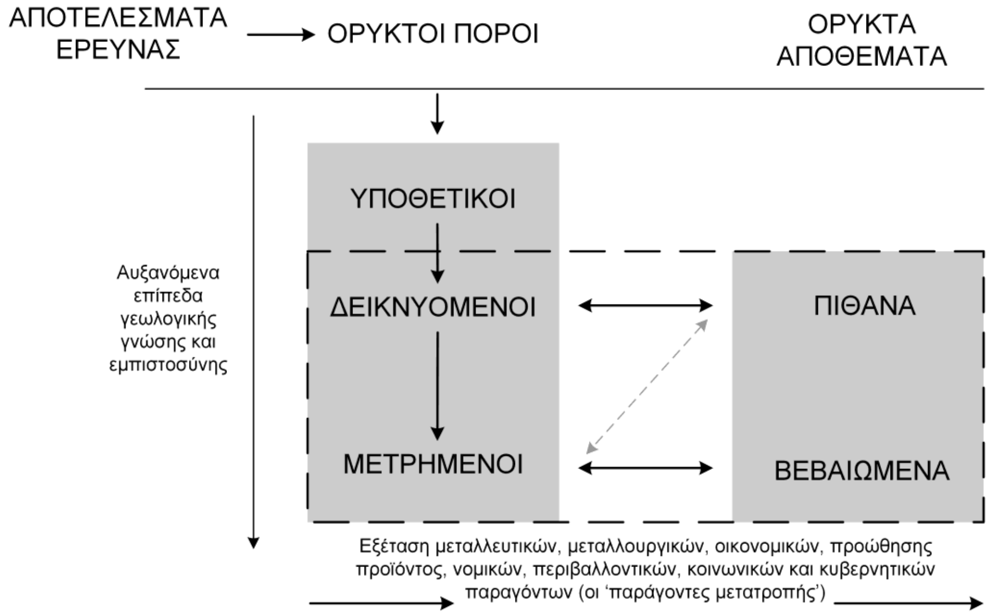
Ορολογία Αναφοράς

10. Δημόσιες Αναφορές που αφορούν Ορυκτούς Πόρους και/ή Ορυκτά Αποθέματα πρέπει να χρησιμοποιούν μόνο τους όρους που δίνονται στο Σχήμα Β.1.

Το Σχήμα Β.1 δίνει το πλαίσιο ταξινόμησης εκτιμήσεων τονάζ και περιεκτικότητας με στόχο την απόδοση διαφορετικών επιπέδων γεωλογικής εμπιστοσύνης και διαφορετικών βαθμών τεχνικής και οικονομικής εκτίμησης. Οι Ορυκτοί Πόροι μπορούν να εκτιμηθούν με βάση τις γεωλογικές πληροφορίες και κάποια εισαγωγή από άλλες σχετικές επιστήμες. Τα Ορυκτά Αποθέματα είναι μια τροποποιημένη υποομάδα των Δεικνυόμενών και Μετρημένων Ορυκτών Πόρων (εντός του διακεκομμένου πλαισίου του Σχήματος Β.1). Η μετατροπή των Ορυκτών Πόρων σε Ορυκτά Αποθέματα απαιτεί την εξέταση παραγόντων που επηρεάζουν την εξόρυξη (‘παράγοντες μετατροπής’), στους οποίους συμπεριλαμ-βάνονται παράγοντες μεταλλευτικοί, μεταλλουργικοί, οικονομικοί, προώ-θησης προϊόντος, νομικοί, περιβαλλοντικοί, κοινωνικοί και κυβερνητικοί, και που σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να εκτιμηθούν με στοιχεία από ένα εύρος επιστημών.

Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, οι Μετρημένοι Ορυκτοί Πόροι μπορούν να μετατραπούν σε Πιθανά Ορυκτά Αποθέματα λόγω της αβεβαιότητας που σχετίζεται με παράγοντες μετατροπής που λαμβάνονται υπόψη στη μετατροπή από Ορυκτούς Πόρους σε Ορυκτά Αποθέματα. Η σχέση αυτή αποδίδεται στο Σχήμα Β.1 με το διακεκομμένο βέλος. Παρόλο που η κατεύθυνση του βέλους αυτού περιλαμβάνει ένα κάθετο στοιχείο, δεν υπονοεί μια μείωση στο επίπεδο γεωλογικής γνώσης ή εμπιστοσύνης. Σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει να εξηγηθούν πλήρως οι παράγοντες μετατροπής. Δείτε επίσης τις οδηγίες του Άρθρου 28.

Είναι δυνατόν Ορυκτά Αποθέματα που αναφέρθηκαν προηγούμενα να υποβιβαστούν σε Ορυκτούς Πόρους λόγω νέων πληροφοριών που επηρεάζουν τους παράγοντες μετατροπής. Αυτή η αμφίδρομη σχέση αποδίδεται με τα διπλά βέλη του Σχήματος Β.1. Οι αλλαγές στους παράγοντες μετατροπής που προκαλούν μια τέτοια μετατροπή θα πρέπει να εξηγηθούν πλήρως. Δείτε τις οδηγίες στο Άρθρο 28.



Σχήμα Β.1: Σχέση μεταξύ Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων.

Γενικά για Αναφορές

11. Δημόσιες Αναφορές που αφορούν τα Αποτελέσματα Μεταλλευτικής Έρευνας, Ορυκτών Πόρων ή Ορυκτών Αποθεμάτων μιας εταιρείας πρέπει να περιλαμβάνουν μια περιγραφή του είδους και της φύσης της μεταλλοφορίας.
12. Η εταιρεία πρέπει να κοινοποιεί σχετικές πληροφορίες που αφορούν την κατάσταση και τα χαρακτηριστικά ενός ορυκτού κοιτάσματος που μπορεί να επηρεάσουν ουσιαστικά την οικονομική αξία του κοιτάσματος, και να αναφέρει οποιεσδήποτε ουσιαστικές μεταβολές στα Αποτελέσματα Μεταλλευτικής Έρευνας, των Ορυκτών Πόρων ή Ορυκτών Αποθεμάτων. Οι εταιρείες παροτρύνονται να αναφέρουν τουλάχιστον ετήσια και να παρέχουν λεπτομέρειες για τα αίτια σημαντικών μεταβολών από έτος σε έτος.

Οι αναφορές προετοιμάζονται για διαφορετικούς λόγους και μπορεί να περιέχουν περισσότερη ή λιγότερη λεπτομέρεια ανάλογα με τον σκοπό χρήσης τους και το κοινό που απευθύνονται. Τα περιεχόμενα μιας αναφοράς θα πρέπει να καθορίζονται από το Αρμόδιο Πρόσωπο να είναι κατάλληλα για τη χρήση της με βάση τη σχετικότητα (ουσιαστικότητα) και όπου είναι κατάλληλο, να αναφέρεται ή να διατίθεται τεκμηρίωση υποστήριξης όπως αναφορές ελέγχου.

13. Σε όλο το περιεχόμενο του Κώδικα, χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες

λέξεις με μια πιο γενική έννοια ενώ μπορεί να έχουν πιο ειδική σημασία για ορισμένες ομάδες εκμετάλλευσης ορυκτών της βιομηχανίας. Για να αποφευχθεί η ανούσια επανάληψη, οι γενικοί όροι δίνονται στο Παράρτημα Β.2 μαζί με άλλους όρους που μπορεί να θεωρηθούν συνώνυμοι για τους σκοπούς αυτού του κειμένου.

Η χρήση ενός συγκεκριμένου όρου σε αυτό το κείμενο δεν σημαίνει ότι προτιμάται ή ότι είναι απαραίτητα ο ιδανικός όρος σε όλες τις περιπτώσεις. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι όπου ο όρος εκμετάλλευση αφορά στη λατομική όπου ασχολούμαστε με πέτρες και λατομικά ορυκτά. Τα Αρμόδια Πρόσωπα αναμένεται να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν την πιο κατάλληλη ορολογία για το υλικό ή τη δραστηριότητα που αναφέρεται.

Αναφορά Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας

14. **Τα Αποτελέσματα Μεταλλευτικής Έρευνας περιλαμβάνουν δεδομένα και πληροφορίες που δημιουργούνται από προγράμματα έρευνας που μπορεί να είναι χρήσιμα στους επενδυτές αλλά που δεν μπορεί να είναι τμήμα μιας επίσημης ανακοίνωσης Ορυκτών Πόρων ή Ορυκτών Αποθεμάτων.** Αυτό είναι σύνηθες στα πρώτα στάδια έρευνας όταν η ποσότητα των διαθέσιμων δεδομένων είναι γενικά ανεπαρκής για να επιτρέψει την παραγωγή λογικών εκτιμήσεων τονάζ και περιεκτικότητας. Παραδείγματα περιλαμβάνουν επιφανειακές εμφανίσεις πετρωμάτων, διαστήματα μοναδικής γεώτρησης ή τα αποτελέσματα γεωφυσικών ερευνών.

    Θα πρέπει να γίνεται ξεκάθαρο στις δημόσιες αναφορές που περιέχουν Αποτελέσματα Μεταλλευτικής Έρευνας ότι είναι λάθος να χρησιμοποιήσει κανείς τέτοιες πληροφορίες για να πάρει εκτιμήσεις τονάζ και περιεκτικότητας. Συνιστάται τέτοιες αναφορές να περιέχουν μια συνεχόμενη δήλωση σύμφωνα με τα εξής:

    "Οι πληροφορίες που παρέχονται σε αυτήν την αναφορά / ανακοίνωση / έκδοση αποτελούν τα Αποτελέσματα Μεταλλευτικής Έρευνας όπως ορίζεται από τον Κώδικα Αναφοράς, Άρθρο 14. Είναι αντικανονική η χρήση τέτοιων πληροφοριών για την παραγωγή εκτιμήσεων τονάζ και περιεκτικότητας".

15. Εάν μια Εταιρεία αναφέρει Αποτελέσματα Μεταλλευτικής Έρευνας σε σχέση με μια μεταλλοφορία που δεν ταξινομείται ως Ορυκτοί Πόροι ή Ορυκτά Αποθέματα, τότε δεν θα πρέπει να αναφέρονται εκτιμήσεις τονάζ και μέσης περιεκτικότητας.

    Οι περιγραφές στόχων έρευνας ή των δυνατοτήτων έρευνας που δίνονται σε Δημόσιες Αναφορές, δεν θα πρέπει να εκφράζονται ώστε να παρερμη-νεύονται ως εκτίμηση Ορυκτών Πόρων ή Ορυκτών

Αποθεμάτων.

16. Οι Δημόσιες Αναφορές Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας σχετικών με μια μεταλλοφορία που δεν ταξινομείται ως Ορυκτοί Πόροι ή Ορυκτά Αποθέματα θα πρέπει να περιέχουν επαρκείς πληροφορίες που θα επιτρέπουν μια ορθή και ισορροπημένη κρίση της σημαντικότητας των αποτελεσμάτων. Η αναφορά Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας δεν θα πρέπει να παρουσιάζεται κατά τρόπο που να υπονοεί αβάσιμα ότι ανακαλύφθηκε μια πιθανώς κερδοφόρα μεταλλοφορία.

Τα Αποτελέσματα Μεταλλευτικής Έρευνας πρέπει να περιλαμβάνουν μια εξήγηση των τεχνικών και δεδομένων δειγματοληψίας, του καθεστώτος ιδιοκτησίας της περιοχής έρευνας, της γεωλογίας και της μεταλλοφορίας και άλλες σχετικές πληροφορίες. Ο Πίνακας Β.1 παρέχει έναν κατάλογο ελέγχου και έναν οδηγό τον οποίο θα πρέπει να χρησιμοποιούν ως αναφορά όσοι προετοιμάζουν αναφορές Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων. Ο κατάλογος δεν είναι απόλυτος και, όπως πάντα, η σχετικότητα και η ουσιαστικότητα είναι αρχές με προτεραιότητα που καθορίζουν ποιες πληροφορίες θα πρέπει να αναφέρονται δημόσια. Η αναφορά μεμονωμένων τιμών χωρίς την απόδοση τους με τη σωστή σημασία είναι μη αποδεκτή.

Αναφορά Ορυκτών Πόρων

17. Ένας ‘Ορυκτός Πόρος’ είναι μια συγκέντρωση ή εμφάνιση υλικού οικονομικού ενδιαφέροντος μέσα ή πάνω στο φλοιό της Γης σε τέτοια μορφή, ποιότητα και ποσότητα ώστε να υπάρχουν λογικές πιθανότητες για δυνατή οικονομική εξόρυξη. Η θέση, η ποιότητα, η περιεκτικότητα, η συνέχεια και άλλα γεωλογικά χαρακτηριστικά ενός Ορυκτού Πόρου είναι γνωστά, εκτιμώνται ή ερμηνεύονται από συγκεκριμένες γεωλογικές αποδείξεις και γνώσεις. Οι Ορυκτοί Πόροι διαχωρίζονται, με σειρά αύξουσας γεωλογικής εμπιστοσύνης στις κατηγορίες Υποθετικών, Δεικνυόμενων και Μετρημένων.

Τμήματα ενός ορυκτού κοιτάσματος που δεν έχουν λογικές πιθανότητες για μελλοντική οικονομική εξόρυξη δεν θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται στους Ορυκτούς Πόρους.

Ο όρος ‘Ορυκτός Πόρος’ καλύπτει το ορυκτό υλικό, συμπεριλαμβανομένων και των αποθέσεων στείρων εξόρυξης και κατεργασίας, που έχει αναγνωριστεί και εκτιμηθεί μέσω έρευνας και δειγματοληψίας και από το οποίο μπορούν να προέλθουν Ορυκτά Αποθέματα με την εφαρμογή των παραγόντων μετατροπής.

Ο όρος ‘λογικές πιθανότητες για μελλοντική οικονομική εξόρυξη’ υπονοεί μια κρίση (αν και πρώιμη) από το Αρμόδιο Πρόσωπο σε σχέση *με τους τεχνικούς και οικονομικούς παράγοντες που πιθανόν να επηρεάσουν τις πιθανότητες οικονομικής εξόρυξης, συμπεριλαμβανομένων κάποιων προσεγγιστικών μεταλλευτικών παραμέτρων. Με άλλα λόγια, ένας Ορυκτός Πόρος δεν είναι μια καταγραφή όλης της μεταλλοφορίας που υπόκειται διάτρηση ή δειγματοληψία, ανεξάρτητα από ελάχιστα όρια εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας, πιθανές διαστάσεις εξόρυξης, θέση ή συνέχεια. Είναι μια ρεαλιστική καταγραφή της μεταλλοφορίας, η οποία, κάτω από υποτιθέμενες και βάσιμες τεχνικές και οικονομικές συνθήκες, μπορεί να γίνει οικονομικά εξορύξιμη.*

Οι παραδοχές που γίνονται κατά τον καθορισμό των 'λογικών πιθανοτήτων για μελλοντική οικονομική εξόρυξη' θα πρέπει να αναγράφονται ξεκάθαρα στη Δημόσια Αναφορά.

Η ερμηνεία της λέξης 'μελλοντικής' σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αλλάζει ανάλογα με το υλικό ή το ορυκτό που εξετάζεται. Για παράδειγμα, για τον γαιάνθρακα, το σίδηρο, τον βωξίτη και άλλα υλικά και ορυκτά μεγάλων ποσοτήτων μπορεί να είναι λογικό να ορίζεται η 'μελλοντική οικονομική εξόρυξη' να καλύπτει χρονικές περιόδους μεγαλύτερες από 50 έτη. Όμως, για την πλειοψηφία των κοιτασμάτων χρυσού, η συγκεκριμένη έννοια περιορίζεται κανονικά ίσως σε 20 με 30 έτη, και συχνά σε πολύ μικρότερες χρονικές περιόδους. Ορισμένες αναφορές (πχ. αναφορές καταγραφής, αναφορές έρευνας προς την κυβέρνηση και άλλες παρόμοιες αναφορές που δεν στοχεύουν στην παροχή πληροφοριών για επενδυτικούς σκοπούς) μπορεί να απαιτούν την πλήρη κοινοποίηση όλης της μεταλλοφορίας, συμπεριλαμβανομένου και υλικού που δεν έχει λογικές πιθανότητες για μελλοντική εξόρυξη. Τέτοιες εκτιμήσεις της μεταλλοφορίας δεν θεωρούνται ως Ορυκτοί Πόροι ή Ορυκτά Αποθέματα υπό τον Κώδικα.

Οποιαδήποτε ουσιαστική προσαρμο-γή στα δεδομένα που γίνεται με σκοπό την εκτίμηση, για παράδειγμα ο αποκλεισμός υψηλών περιεκτικοτή-των, θα πρέπει να αναφέρεται ξεκάθαρα και να περιγράφεται στη Δημόσια Αναφορά.

Όπου θεωρείται κατάλληλο από το Αρμόδιο Πρόσωπο, οι εκτιμήσεις Ορυκτών Πόρων μπορούν να περιλαμβάνουν υλικό κάτω από το επιλεγμένο ελάχιστο όριο εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας για να εγγυηθεί ότι οι Ορυκτοί Πόροι αποτελούνται από σώματα μεταλλοφορίας επαρκούς μεγέθους και συνέχειας για τη σωστή επιλογή της πιο κατάλληλης προσέγγισης στην εκμετάλλευση. Το υλικό αυτό μπορεί να περιλαμβάνει αραίωση από την απαίτηση για ένα ελάχιστο πλάτος εξόρυξης. Η τεκμηρίωση των εκτιμήσεων Ορυκτών Πόρων πρέπει να αναγνωρίζει ξεκάθαρα τα σημεία στα οποία γίνεται η προσαρμογή αυτή, και οι Δημόσιες Αναφορές θα πρέπει να περιλαμβάνουν σχόλια *επί του θέματος εάν θεωρείται ουσιαστικό.*

18. **Ένας ‘Υποθετικός Ορυκτός Πόρος’ είναι εκείνο το τμήμα ενός Ορυκτού Πόρου για το οποίο το τονάζ, η περιεκτικότητα και το ορυκτό περιεχόμενο μπορούν να εκτιμηθούν με χαμηλά επίπεδα εμπιστοσύνης. Είναι δυνατό από τις γεωλογικές ενδείξεις και την υποτιθέμενη αλλά μη επαληθευμένη συνέχεια της γεωλογίας και/ή της περιεκτικότητας. Βασίζεται σε πληροφορίες που συγκεντρώ-νονται με κατάλληλες τεχνικές από θέσεις όπως επιφανειακές εμφανίσεις, κανάλια, εκσκαφές και γεωτρήσεις αμφιβόλου ποιότητας και αξιοπιστίας.**

    Ένας Υποθετικός Ορυκτός Πόρος έχει χαμηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης από αυτόν που εφαρμόζεται στην περίπτωση ενός Δεικνυόμενου Ορυκτού Πόρου.

    Η κατηγορία αυτή σκοπεύει να καλύψει περιπτώσεις όπου μια συγκέντρωση ορυκτού ή εμφάνιση έχει αναγνωριστεί ενώ έχουν ολοκληρωθεί περιορισμένες μετρήσεις και δειγματοληψία, αλλά όπου τα δεδομένα είναι ανεπαρκή για να επιτρέψουν την ερμηνεία της γεωλογικής συνέχειας και/ή τη συνέχεια της περιεκτικότητας με εμπιστοσύνη. Λόγω της αβεβαιότητας που συνοδεύει κάποιους Υποθετικούς Ορυκτούς Πόρους, δεν μπορεί να υποτεθεί ότι όλο ή μέρος ενός Υποθετικού Ορυκτού Πόρου θα αναβαθμιστεί σε έναν Δεικνυόμενο ή Μετρημένο Ορυκτό Πόρο ως αποτέλεσμα συνεχιζόμενης έρευνας. Η εμπιστοσύνη στην εκτίμηση είναι συνήθως ανεπαρκής για να επιτρέψει την κατάλληλη εφαρμογή τεχνικών και οικονομικών παραμέτρων ή να επιτρέψει μια αξιόπιστη εκτίμηση της οικονομικής σκοπιμότητας. Για αυτό το λόγο, δεν υπάρχει καμία άμεση σύνδεση από τον Υποθετικό Πόρο προς οποιαδήποτε κατηγορία Ορυκτών Αποθεμάτων (δείτε το Σχήμα Β.1). Σύμφωνα με την κρίση του Αρμόδιου Προσώπου, μια Εταιρεία μπορεί να συμπεριλάβει ολόκληρο ή μέρος του Υποθετικού Ορυκτού Πόρου για σκοπούς εσωτερικού σχεδιασμού. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα αποτελέσματα δεν θεωρούνται επαρκώς αξιόπιστα για να βεβαιωθεί πέρα από όποια αμφιβολία ότι όλος ο Υποθετικός Ορυκτός Πόρος θα γίνει μελλοντικά Ορυκτό Απόθεμα. Οποιαδήποτε τέτοια εξάρτηση από τους Υποθετικούς Ορυκτούς Πόρους σε ένα σχέδιο εκμετάλλευσης θα πρέπει να γίνεται ξεκάθαρη στην αναφορά.

19. **Ένας ‘Δεικνυόμενος Ορυκτός Πόρος’ είναι εκείνο το μέρος ενός Ορυκτού Πόρου για το οποίο μπορεί να εκτιμηθεί το τονάζ, οι πυκνότητες, το σχήμα, τα φυσικά χαρακτηριστικά και το ορυκτό περιεχόμενο με κάποιο λογικό επίπεδο εμπιστοσύνης. Βασίζεται σε πληροφορίες έρευνας, δειγματοληψίας και δοκιμών που συλλέγονται με κατάλληλες τεχνικές από θέσεις όπως επιφανειακές εμφανίσεις, κανάλια, εκμεταλλεύσεις,**

εργοτάξια και γεωτρήσεις. Οι θέσεις είναι πολύ αραιά ή ακατάλληλα κατανε-μημένες για να επιβεβαιώσουν τη γεωλογική συνέχεια και/ή τη συνέχεια της περιεκτικότητας αλλά είναι αρκετά πυκνές για να υποτεθεί η συνέχεια.

Ένας Δεικνυόμενος Ορυκτός Πόρος έχει χαμηλότερο επίπεδο εμπιστο-σύνης από αυτό που εφαρμόζεται σε έναν Μετρημένο Ορυκτό Πόρο, αλλά έχει υψηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης από έναν Υποθετικό Ορυκτό Πόρο.

Ένας Δεικνυόμενος Ορυκτός Πόρος απαιτεί τέτοια φύση, ποιότητα, ποσότητα και κατανομή δεδομένων που να επιτρέπει στο Αρμόδιο Πρόσωπο να ερμηνεύσει με εμπιστοσύνη το γεωλογικό πλαίσιο και να υποθέσει τη γεωλογική συνέχεια στη μεταλλοφορία. Η εμπιστοσύνη στην εκτίμηση είναι επαρκής για να επιτρέψει την κατάλληλη εφαρμογή τεχνικών και οικονομικών παραμέτρων και την εκτίμηση της οικονομικής σκοπιμότητας.

20. **Ένας ‘Μετρημένος Ορυκτός Πόρος’ είναι εκείνο το μέρος ενός Ορυκτού Πόρου για το οποίο μπορεί να εκτιμηθεί το τονάζ, οι πυκνότητες, το σχήμα, τα φυσικά χαρακτηριστικά, η περιεκτικότητα και το ορυκτό περιεχόμενο με μεγάλο επίπεδο εμπιστοσύνης. Βασίζεται σε λεπτομερείς και αξιόπιστες πληροφορίες έρευνας, δειγματοληψίας και δοκιμών συλλεγμένες μέσω κατάλληλων τεχνικών από θέσεις όπως επιφανειακές εμφανίσεις, κανάλια, εκμεταλλεύσεις, εκσκαφές και γεωτρήσεις. Οι θέσεις είναι αρκετά πυκνές για να βεβαιωθεί η γεωλογική συνέχεια και η συνέχεια της περιεκτικότητας.**

Ένας Μετρημένος Ορυκτός Πόρος απαιτεί η φύση, ποιότητα, ποσότητα και κατανομή των δεδομένων να είναι τέτοια που να μην αφήνει καμιά βάσιμη αμφιβολία κατά τη γνώμη του Αρμόδιου Προσώπου ότι το τονάζ και η περιεκτικότητα της μεταλλοφορίας μπορούν να εκτιμηθούν εντός στενών ορίων. Οποιαδήποτε μεταβολή εντός αυτών των ορίων δεν θα επηρέαζε σημαντικά την πιθανή οικονομική σκοπιμότητα. Η κατηγορία αυτή απαιτεί υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης και κατανόησης της γεωλογίας και των ελέγχων του ορυκτού κοιτάσματος. Η εμπιστοσύνη στην εκτίμηση είναι επαρκής για να επιτρέψει την εφαρμογή τεχνικών και οικονομικών παραμέτρων και την εκτίμηση της οικονομικής σκοπιμότητας με υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης.

21. Η επιλογή της κατάλληλης κατηγορίας Ορυκτών Πόρων εξαρτάται από την ποσότητα, κατανομή και ποιότητα των διαθέσιμων δεδομένων και του επιπέδου εμπιστοσύνης που τα χαρακτηρίζει. Η κατάλληλη κατηγορία Ορυκτών Πόρων πρέπει να καθοριστεί από ένα Αρμόδιο Πρόσωπο.

Η ταξινόμηση Ορυκτών Πόρων είναι αντικείμενο έμπειρης κρίσης, και το

Αρμόδιο Πρόσωπο θα πρέπει να λάβει υπόψη εκείνα τα αντικείμενα του Πίνακα Β.1 που σχετίζονται με την εμπιστοσύνη, την ακρίβεια (δηλαδή, την έλλειψη μεροληψίας) και την πιστότητα (δηλαδή την επαναληψιμότητα) στην εκτίμηση Ορυκτών Πόρων.

Κατά την επιλογή μεταξύ Μετρημένων Ορυκτών Πόρων και Δεικνυόμενων, το Αρμόδιο Πρόσωπο μπορεί να θεωρήσει χρήσιμη, εκτός από τις φράσεις στους δυο ορισμούς που σχετίζονται με τη συνέχεια τη γεωλογική και της περιεκτικότητας στα Άρθρα 19 και 20, τη φράση στην οδηγία του ορισμού των Μετρημένων Ορυκτών Πόρων, '...κάθε μεταβολή εντός αυτών των ορίων δεν θα επηρεάσει σημαντικά την πιθανή οικονομική σκοπιμότητα'.

Κατά την επιλογή μεταξύ Δεικνυόμενων και Υποθετικών Ορυκτών Πόρων, το Αρμόδιο Πρόσωπο μπορεί να επιθυμεί να λάβει υπόψη, εκτός από τις φράσεις στους δυο ορισμούς των Άρθρων 18 και 19 που σχετίζονται με τη συνέχεια τη γεωλογική και της περιεκτικότητας, την οδηγία στον ορισμό των Δεικνυόμενων Ορυκτών Πόρων: 'Η εμπιστοσύνη στην εκτίμηση είναι επαρκής για να επιτρέψει την κατάλληλη εφαρμογή τεχνικών και οικονομικών παραγόντων και την εκτίμηση της οικονομικής σκοπιμότητας'. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την οδηγία στον ορισμό των Υποθετικών Ορυκτών Πόρων: 'Η εμπιστοσύνη στις εκτιμήσεις είναι συνήθως ανεπαρκής για να επιτραπεί η κατάλληλη εφαρμογή τεχνικών και οικονομικών παραγόντων ή να επιτραπεί μια αξιόπιστη εκτίμηση της οικονομικής σκοπιμότητας. Το Αρμόδιο Πρόσωπο θα πρέπει επίσης να εξετάσει θέματα τύπου και κλίμακας μεταλλοφορίας όταν εκτιμά τη γεωλογική συνέχεια και τη συνέχεια της περιεκτικότητας.

22. Οι εκτιμήσεις Ορυκτών Πόρων δεν είναι ακριβείς υπολογισμοί, καθώς εξαρτώνται από την ερμηνεία περιορισμένων πληροφοριών σχετικών με τη θέση, το σχήμα και τη συνέχεια της εμφάνισης και από τα διαθέσιμα αποτελέσματα δειγματοληψίας. Η αναφορά τιμών τονάζ και περιεκτικότητας θα πρέπει να αντικατοπτρίζει τον βαθμό ακρίβειας της εκτίμησης στρογγυλοποιώντας στον κατάλληλο αριθμό σημαντικών ψηφίων και, όπου είναι κατάλληλο μέσω ποιοτικών όρων όπως 'κατά προσέγγιση'.

    Στις περισσότερες περιπτώσεις, η στρογγυλοποίηση στο δεύτερο σημαντικό ψηφίο θα πρέπει να είναι επαρκής. Για παράδειγμα, οι 10,863,000 τόνοι με 8.23% θα πρέπει να αναφέρονται ως 11 εκατομμύρια τόνοι με 8.2%. Θα υπάρχουν περιπτώσεις, όμως, όπου η στρογγυλοποίηση στο πρώτο σημαντικό ψηφίο θα είναι απαραίτητη για να αποδοθούν κατάλληλα οι αβεβαιότητες στην εκτίμηση. Αυτό θα συμβαίνει συνήθως στους Υποθετικούς Ορυκτούς Πόρους.

    Για να δοθεί έμφαση στην ανακριβή φύση της εκτίμησης Ορυκτών

Πόρων, συνιστάται να αναφέρονται πάντα τα τελικά αποτελέσματα ως μια εκτίμηση και όχι ως ένας υπολογισμός.

23. Οι Δημόσιες Αναφορές Ορυκτών Πόρων πρέπει να καθορίζουν μια ή περισσότερες κατηγορίες 'Υποθετικών', 'Δεικνυόμενων', ή 'Μετρημένων'. Οι αναφορές δεν πρέπει να περιέχουν τιμές Ορυκτών Πόρων που να συνδυάζουν δυο ή περισσότερες κατηγορίες εκτός εάν δίνονται οι τιμές και για τις επιμέρους κατηγορίες. Ένας Ορυκτός Πόρος δεν πρέπει να αναφέρεται με όρους περιεχόμενου ορυκτού εκτός και αν δίνονται επίσης οι αντίστοιχες τιμές τονάζ και περιεκτικότητας. Οι Ορυκτοί Πόροι δεν θα πρέπει να συνδυάζονται με Ορυκτά Αποθέματα.

    Ο Πίνακας Β.1 δίνει, περιληπτικά, έναν κατάλογο από τα κύρια κριτήρια που πρέπει να εξετάζονται κατά την προετοιμασία αναφορών Αποτελε-σμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων. Τα κριτήρια αυτά δεν χρειάζεται να αναλύονται σε μια Δημόσια Αναφορά εκτός και εάν επηρεάζουν ουσιαστικά την εκτίμηση ή την ταξινόμηση των Ορυκτών Πόρων και Αποθεμάτων.

    Δεν είναι απαραίτητο σε μια Δημόσια Αναφορά να σχολιαστεί κάθε αντικείμενο το Πίνακα Β.1, αλλά είναι βασικό να αναλυθούν οποιαδήποτε θέματα που μπορεί να επηρεάσουν ουσιαστικά την κατανόηση του αναγνώστη ή την ερμηνεία των αποτελεσμάτων ή των εκτιμήσεων που αναφέρονται. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό όταν ανεπαρκή ή αβέβαια δεδομένα επηρεάζουν την αξιοπιστία, ή την εμπιστοσύνη σε μια δήλωση Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας ή μια εκτίμηση Ορυκτών Πόρων και/ή Ορυκτών Αποθεμάτων -για παράδειγμα, η φτωχή απόληψη δείγματος, η χαμηλή επαναλη-ψιμότητα των αναλύσεων ή των εργαστηριακών αποτελεσμάτων, οι περιορισμένες πληροφορίες για τους συντελεστές τονάζ, κλπ.

24. Οι λέξεις 'μετάλλευμα' και 'αποθέματα' δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται όταν αναφέρονται εκτιμήσεις Ορυκτών Πόρων καθώς οι όροι αυτοί υπονοούν τεχνική σκοπιμότητα και οικονομική βιωσιμότητα και είναι κατάλληλοι μόνο όταν έχουν εξεταστεί όλοι οι παράγοντες μετατροπής. Οι αναφορές και οι δηλώσεις θα πρέπει να συνεχίζουν να αναφέρονται στην κατάλληλη κατηγορία ή κατηγορίες Ορυκτών Πόρων μέχρι να καθοριστεί η τεχνική σκοπιμότητα και η οικονομική βιωσιμότητα. Εάν η αναθεώρηση δείχνει ότι οποιοδήποτε τμήμα των Ορυκτών Αποθεμάτων δεν είναι πλέον έγκυρο, αυτά τα Ορυκτά Αποθέματα θα πρέπει να αναταξινομηθούν ως Ορυκτοί Πόροι ή να αφαιρεθούν από τις δηλώσεις Ορυκτών Πόρων/ Ορυκτών Αποθεμάτων.

    Δεν είναι σκόπιμη η αναταξινόμηση των Ορυκτών Αποεθμάτων σε Ορυκτούς Πόρους ή το αντίθετο ως αποτέλεσμα αλλαγών που *αναμένεται να είναι βραχυπρόθεσμες ή προσωρινές στη φύση τους, ή όπου η διεύθυνση της εταιρείας έχει πάρει μια συνειδητή απόφαση να λειτουργήσει σε υπο-οικονομική βάση. Παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων μπορεί να είναι μια πτώση της τιμής του ορυκτού η οποία αναμένεται να είναι μικρής διάρκειας, ένα επείγον περιστατικό στο ορυχείο προσωρινής φύσης, μια απεργία των μέσων μεταφοράς, κλπ.*

Αναφορά Ορυκτών Αποθεμάτων

25. **Τα 'Ορυκτά Αποθέματα' είναι το οικονομικά εξορύξιμο τμήμα των Μετρημένων και/ή των Δεικνυόμενων Ορυκτών Πόρων. Περιλαμβάνει αραιωμένα υλικά και ανοχές για απώλειες, οι οποίες μπορούν να συμβούν όταν το υλικό εξορύσσεται. Γίνονται κατάλληλες εκτιμήσεις, οι οποίες μπορεί να περιλαμβάνουν μελέτες σκοπιμότητας όπου εξετάζονται και εφαρμόζονται ρεαλιστικοί μεταλλευτικοί, μεταλλουργικοί, οικονομικοί, προώθησης προϊόντος, νομικοί, κοινωνικοί, και κυβερνητικοί παράγοντες. Οι εκτιμήσεις αυτές δείχνουν τη στιγμή της αναφοράς ότι η εξόρυξη είναι δικαιολογημένη. Τα Ορυκτά Αποθέματα χωρίζονται με σειρά αυξανόμενης εμπιστοσύνης σε Πιθανά και Βεβαιωμένα Ορυκτά Αποθέματα.**

Τα Ορυκτά Αποθέματα είναι εκείνα τα τμήματα των Ορυκτών Πόρων τα οποία, μετά την εφαρμογή παραγόντων μετατροπής, οδηγούν σε ένα εκτιμώμενο τονάζ και περιεκτικότητα, τα οποία κατά τη γνώμη του Αρμόδιου Προσώπου που κάνει τις εκτιμήσεις μπορεί να αποτελούν τη βάση ενός βιώσιμου έργου. Τα Ορυκτά Αποθέματα που αναφέρονται μπορεί να περιλαμβάνουν οριακά οικονομικό υλικό και υλικό αραίωσης που παραδίδεται για επεξεργασία ή μεταφέρεται από το ορυχείο χωρίς επεξεργασία. Για αποφυγή σύγχυσης στην αναφορά Ορυκτών Αποθεμάτων, ο ορισμός της επεξεργασίας μπορεί να περιλαμβάνει οποιοδήποτε εμπλουτισμό του αρχικού προϊόντος που μπορεί να γίνει πριν, ή κατά τη διάρκεια της μεταλλουργικής διαδικασίας.

Οι τεχνικές εκτίμησης που χρησιμοποιούνται (συμπεριλαμβανο-μένου, όπου είναι σχετικό, του μεγέθους των μπλοκ) και οι βασικές παραδοχές που γίνονται για να φτάσουμε στην εκτίμηση θα πρέπει να δηλώνονται.

Ο όρος οικονομική υπονοεί ότι η εξόρυξη των Ορυκτών Αποθεμάτων έχει αποδειχθεί ότι είναι βιώσιμη και δικαιολογημένη κάτω από λογικές οικονομικές παραδοχές. Το τι είναι ρεαλιστικό θα αλλάζει με τον τύπο κοιτάσματος, το επίπεδο της μελέτης που έχει γίνει και τις οικονομικές απαιτήσεις από την κάθε εταιρεία. Για αυτό το λόγο, δεν μπορεί να υπάρξει σταθερός ορισμός του όρου οικονομική. Παρόλα αυτά, οι εταιρείες αναμένεται να προσπαθήσουν να πετύχουν αποδεκτά έσοδα επί του επενδυμένου κεφαλαίου, και ότι τα *κέρδη προς τους επενδυτές του έργου θα είναι ανταγωνιστικά με εναλλακτικές επενδύσεις παρόμοιου ρίσκου.*

Για να επιτευχθεί το απαιτούμενο επίπεδο εμπιστοσύνης στους Ορυκτούς Πόρους και σε όλους τους παράγοντες μετατροπής αναμένεται οι μελέτες να έχουν φτάσει τουλάχιστο σε επίπεδο προ-σκοπιμότητας πριν τον καθορισμό των Ορυκτών Αποθεμάτων. Η μελέτη θα έχει καθορίσει ένα σχέδιο εκμετάλλευσης που είναι τεχνικά εφικτό και οικονομικά βιώσιμο και από το οποίο μπορούν να υπολογιστούν τα Ορυκτά Αποθέματα.

Ο όρος 'Ορυκτό Απόθεμα' δεν είναι απαραίτητο να υποδηλώνει ότι ο εξοπλισμός εξόρυξης είναι τοποθετημένος ή σε λειτουργία, ή ότι έχουν ληφθεί όλες οι κυβερνητικές άδειες. Υποδηλώνει ότι υπάρχουν λογικές προσδοκίες για αυτές τις άδειες.

Κατά την αναφορά Ορυκτών Αποθεμάτων, οι πληροφορίες για τους παράγοντες μεταλλουργικής ανάκτησης είναι πολύ σημαντικές, και θα πρέπει πάντα να περιλαμβάνονται στις Δημόσιες Αναφορές.

Εάν υπάρχει αμφιβολία ως προς το τι πρέπει να αναφερθεί, είναι καλύτερα να κλίνουμε προς την πλευρά της παροχής περισσότερων πληροφοριών από ότι χρειάζεται παρά λιγότερων.

Οι εκτιμήσεις Ορυκτών Πόρων αναφέρονται ορισμένες φορές μετά τον αποκλεισμό ή τη διαγραφή υψηλών περιεκτικοτήτων ή την εφαρμογή εμπειρικών παραγόντων μεταλλείου ή εμπλουτισμού που αντικατοπτρίζουν ιστορική εμπειρία ως προς τη συμφιλίωση μεταξύ εκτιμήσεων Ορυκτών Αποθεμάτων και πραγματικής παραγωγής. Εάν προσαρμόζονται ουσιαστικά ή μετατρέπονται οποιαδήποτε από τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση Ορυκτών αποθεμάτων με σκοπό την εκτίμηση, αυτό θα πρέπει να αναφέρεται ξεκάθαρα σε μια Δημόσια Αναφορά και να περιγράφεται η φύση της προσαρμογής ή της μετατροπής.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο Κώδικας δεν υπονοεί ότι μια οικονομική επιχείρηση πρέπει να έχει Βεβαιωμένα Ορυκτά Αποθέματα. Θα υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα Πιθανά Ορυκτά Αποθέματα από μόνα τους είναι επαρκή για τη δικαιολόγηση της εξόρυξης, όπως για παράδειγμα με μερικά αλλουβιακά κοιτάσματα κασσίτερου, διαμαντιών ή χρυσού. Αυτό είναι αντικείμενο κρίσης από το Αρμόδιο Πρόσωπο.
Όπου οι εταιρείες προτιμούν τη χρήση του όρου 'Μεταλλευτικά Αποθέματα' στις Δημόσιες Αναφορές τους, θα πρέπει να δηλώνουν ξεκάθαρα ότι ο όρος αυτός χρησιμοποιείται με την ίδια έννοια με τα 'Ορυκτά Αποθέματα', που ορίζονται σε αυτό τον Κώδικα.

26. **Ένα 'Πιθανό Ορυκτό Απόθεμα' είναι το οικονομικά εξορύξιμο μέρος ενός Πιθανού, και σε μερικές περιπτώσεις, ενός Μετρημένου Ορυκτού Πόρου. Περιλαμβάνει υλικά αραίωσης και ανοχές για απώλειες, οι οποίες μπορεί να συμβούν όταν το υλικό εξορύσσεται. Έχουν γίνει κατάλληλες εκτιμήσεις, οι οποίες μπορεί να περιλαμβάνουν μελέτες σκοπιμότητας, και οι οποίες περιλαμβάνουν την εξέταση, και μετατροπή μέσω ρεαλιστικά υποτιθέμενων μεταλλευτικών, μεταλλουργικών, οικονομικών, προώθησης προϊόντος, νομικών, περιβαλλοντικών, κοινωνικών και κυβερνητικών παραγόντων. Οι εκτιμήσεις αυτές δείχνουν τη στιγμή της αναφοράς ότι η εξόρυξη είναι δικαιολογημένη**.

    Ένα Πιθανό Ορυκτό Απόθεμα έχει χαμηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης από ένα Βεβαιωμένο Ορυκτό Απόθεμα αλλά είναι επαρκούς ποιότητας για να χρησιμοποιηθεί ως βάση για μια απόφαση ανάπτυξης του κοιτά-σματος.

27. **Ένα 'Βεβαιωμένο Ορυκτό Απόθεμα' είναι το οικονομικά εξορύξιμο μέρος ενός Μετρημένου Ορυκτού Πόρου. Περιλαμβάνει υλικά αραίωσης και ανοχές για απώλειες, οι οποίες μπορεί να συμβούν όταν το υλικό εξορύσσεται. Έχουν γίνει κατάλληλες εκτιμήσεις, οι οποίες μπορεί να περιλαμβάνουν μελέτες σκοπιμότητας, και οι οποίες περιλαμβάνουν την εξέταση, και μετατροπή μέσω ρεαλιστικά υποτιθέμενων μεταλλευτικών, μεταλλουργικών, οικονομικών, προώθησης προϊόντος, νομικών, περιβαλλοντικών, κοινωνικών και κυβερνητικών παραγόντων. Οι εκτιμήσεις αυτές δείχνουν τη στιγμή της αναφοράς ότι η εξόρυξη είναι δικαιολογημένη**.

    Ένα Βεβαιωμένο Ορυκτό Απόθεμα αντιπροσωπεύει την κατηγορία υψηλότερης εμπιστοσύνης του διαθέσιμου υλικού μιας εταιρείας και τεχνικά αλλά και οικονομικά. Όπως σημειώνεται στις οδηγίες του Άρθρου 25, ο τύπος της μεταλλοφορίας ή άλλοι παράγοντες μπορεί να σημαίνουν ότι σε ορισμένα κοιτάσματα δεν είναι εφικτά τα Βεβαιωμένα Ορυκτά Αποθέματα. Θα πρέπει να δοθεί προσοχή ώστε να αποφευχθεί η δήλωση Βεβαιωμένων Ορυκτών Αποθεμάτων πολύ νωρίς στη ζωή ενός έργου όταν δεδομένα στη συνέχεια μπορεί να δείξουν ότι αυτή η απόφαση ήταν υπεραισιόδοξη, και ότι τα αποθέματα θα πρέπει να υποβαθμιστούν ή να αφαιρεθούν. Είναι γενικά καλύτερα να διατηρηθούν οι αρχικές εκτιμήσεις ως Πιθανά Αποθέματα ή να καθυστερήσουμε την αναφορά παρά να αναγκαζόμαστε να πάρουμε πίσω δηλώσεις στο μέλλον.

28. Η επιλογή της κατάλληλης κατηγορίας Ορυκτού Αποθέματος γίνεται αρχικά από το σχετικό επίπεδο εμπιστοσύνης του Ορυκτού Πόρου και μετά τη θεώρηση οποιονδήποτε αβεβαιοτήτων στους παράγοντες μετατροπής. Η απόδοση της κατάλληλης

κατηγορίας πρέπει να γίνει από το Αρμόδιο Πρόσωπο.

Ο Κώδικας παρέχει μια άμεση σχέση μεταξύ Δεικνυόμενων Ορυκτών Πόρων και Πιθανών Ορυκτών Αποθεμάτων και μεταξύ Μετρημένων Ορυκτών Πόρων και Βεβαιωμένων Ορυκτών Αποθεμάτων. Με άλλα λόγια, το επίπεδο γεωλογικής εμπιστοσύνης των Πιθανών Ορυκτών Αποθεμάτων είναι παρόμοιο εκείνου που απαιτείται για τον καθορισμό των Δεικνυόμενων Ορυκτών Πόρων. Το επίπεδο γεωλογικής εμπιστοσύνης για τα Βεβαιωμένα Ορυκτά Αποθέματα είναι παρόμοιο εκείνου που απαιτείται για τον καθορισμό των Μετρημένων Ορυκτών Πόρων. Οι Υποθετικοί Ορυκτοί Πόροι είναι πάντα επι-πρόσθετοι στα Ορυκτά Αποθέματα.

Ο Κώδικας επίσης παρέχει μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ Μετρημένων Ορυκτών Πόρων και Πιθανών Ορυκτών Αποθεμάτων. Αυτή δίνεται για να καλύψει μια περίπτωση όπου οι αβεβαιότητες που σχετίζονται με οποιονδήποτε από τους εξεταζό-μενους παράγοντες μετατροπής όταν μετατρέπονται Πόροι σε Αποθέματα μπορούν να οδηγήσουν στην ύπαρξη χαμηλότερου βαθμού εμπιστοσύνης στα Ορυκτά Αποθέματα από ότι στους αντίστοιχους Πόρους. Μια τέτοια μετατροπή δεν θα σήμαινε τη μείωση στο επίπεδο γεωλογικής γνώσης ή εμπιστοσύνης.

Ένας Μετρημένος Ορυκτός Πόρος μπορεί να μετατραπεί σε ένα Βεβαιωμένο Ορυκτό Απόθεμα με την αφαίρεση των αβεβαιοτήτων στους παράγοντες μετατροπής. Κανένα ποσό εμπιστοσύνης στους παράγοντες μετατροπής για τη μετατροπή ενός Ορυκτού Πόρου σε ένα Ορυκτό Απόθεμα δεν μπορεί να ξεπεράσει το ανώτερο επίπεδο εμπιστοσύνης που υπάρχει σε ένα Ορυκτό Πόρο. Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί ένας Δεικνυόμενος Ορυκτός Πόρος να μετατραπεί άμεσα σε ένα Βεβαιωμένο Ορυκτό Απόθεμα (δείτε το Σχήμα Β.1).

Η εφαρμογή της κατηγορίας Βεβαιωμένων Ορυκτών Αποθεμάτων υπονοεί τον υψηλότερο βαθμό εμπιστοσύνης στην εκτίμηση, με επακόλουθες προσ-δοκίες στο μυαλό των αναγνωστών της αναφοράς. Αυτές οι προσδοκίες θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όταν κατηγοριοποιείται ένας Ορυκτός Πόρος ως Μετρημένος.

Ανατρέξτε επίσης στις οδηγίες του Άρθρου 21 σχετικά με την ταξινόμηση Ορυκτών Πόρων.

29. Οι εκτιμήσεις Ορυκτών Αποθεμάτων δεν είναι ακριβείς υπολογισμοί, και έτσι οι τιμές τονάζ και περιεκτικότητας στις αναφορές θα πρέπει να εκφράζονται έτσι ώστε να αποδίδουν το βαθμό ακρίβειας των εκτιμήσεων με στρογγυλοποίηση στο κατάλληλο αριθμό σημαντικών ψηφίων.

    Ανατρέξτε στις οδηγίες του Άρθρου 22 σχετικά με τη στρογγυλοποίηση εκτιμήσεων Ορυκτών Πόρων.

    Για να δοθεί έμφαση στην ανακριβή

φύση μιας εκτίμησης Ορυκτών Αποθεμάτων, συνιστάται τα τελικά αποτελέσματα να αναφέρονται πάντα ως εκτιμήσεις και όχι ως υπολο-γισμοί.

30. Οι Δημόσιες Αναφορές Ορυκτών Αποθεμάτων πρέπει να καθορίζουν μία ή περισσότερες κατηγορίες ‘Βεβαιωμένων’ και ‘Πιθανών’. Οι αναφορές δεν πρέπει να περιλαμβάνουν συνδυασμένες τιμές Βεβαιωμένων και Πιθανών Ορυκτών Αποθεμάτων εκτός εάν δίνονται επίσης και οι σχετικές τιμές για τις ξεχωριστές κατηγορίες. Οι αναφορές δεν πρέπει να παρουσιάζουν τιμές ορυκτού περιεχομένου εκτός εάν δίνονται και οι αντίστοιχες τιμές τονάζ και περιεκτικότητας.

    Τα Ορυκτά Αποθέματα μπορεί να περιλαμβάνουν και υλικό (αραίωση) που δεν είναι μέρος του αρχικού Ορυκτού Πόρου. Είναι βασικό να γίνεται αντιληπτή αυτή η θεμελιώδης διαφορά μεταξύ Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων και να ασκείται προσοχή όταν δοκιμάζουμε να βγάλουμε συμπεράσματα από μια σύγκριση των δυο.

    Η Δημόσια Αναφορά τονάζ και περιεκτικότητας εκτός των κατηγοριών που καλύπτονται από τον Κώδικα δεν επιτρέπεται. Αυτές οι τιμές μπορεί να είναι χρήσιμες εκτιμήσεις για μια εταιρεία στους εσωτερικούς υπολογισμούς και της εκτιμήσεις της, αλλά η συμπερίληψη τους σε Δημόσιες Αναφορές θα προκαλούσε σύγχυση.

    Όταν αναφέρονται δημόσια αναθεωρημένες δηλώσεις Ορυκτών Αποθεμάτων και Ορυκτών Πόρων θα πρέπει να συνοδεύονται με συμφιλίωση με προηγούμενες δηλώσεις. Δεν είναι απαραίτητη η λεπτομερής καταγραφή των διαφορών μεταξύ των τιμών, αλλά αρκεί να γίνονται κάποια σχόλια που να επιτρέπουν τον αναγνώστη να κατανοήσει τις πιο σημαντικές μεταβολές.

31. Σε περιπτώσεις όπου αναφέρονται τιμές και για Ορυκτούς Πόρους αλλά και για Ορυκτά Αποθέματα, θα πρέπει να περιλαμβάνεται και μια δήλωση στην αναφορά που να ξεκαθαρίζει το εάν οι Ορυκτοί Πόροι συμπεριλαμβάνουν, ή είναι συμπληρωματικοί των Ορυκτών Αποθεμάτων.

    Σε ορισμένες περιπτώσεις υπάρχουν λόγοι για την αναφορά Ορυκτών Πόρων που να συμπεριλαμβάνουν τα Ορυκτά Αποθέματα και σε κάποιες άλλες περιπτώσεις για την αναφορά Ορυκτών Πόρων συμπληρωματικών των Ορυκτών Αποθεμάτων. Θα πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ποια μορφή αναφοράς χρησιμοποιείται. Κατάλ-ληλες μορφές των επεξηγητικών σχολίων μπορεί να είναι οι εξής:
    ’Οι Μετρημένοι και Δεικνυόμενοι Ορυκτοί Πόροι περιλαμβάνουν εκείνους τους Ορυκτούς Πόρους που μετατρέπονται για τη δημιουργία των Ορυκτών Αποθεμάτων’.

    Ή

'Οι Μετρημένοι και Δεικνυόμενοι Ορυκτοί Πόροι είναι συμπληρωματικοί των Ορυκτών Αποθεμάτων.'

Στην πρώτη περίπτωση, εάν κάποιοι Ορυκτοί Πόροι δεν έχουν μετατραπεί για τη δημιουργία Ορυκτών Αποθεμάτων για οικονομικούς ή άλλους λόγους, οι σχετικές λεπτομέρειες αυτών των μη-μετατρεπόμενων Ορυκτών Πόρων θα πρέπει να περιλαμβάνονται στην αναφορά. Αυτό γίνεται για να βοηθήσει τον αναγνώστη της αναφοράς να κρίνει την πιθανότητα των μη-μετατρεπόμενων Μετρημένων και Δεικνυόμενων Ορυκτών Πόρων να μετατραπούν μελλοντικά σε Ορυκτά Αποθέματα.

Οι Υποθετικοί Ορυκτοί Πόροι είναι εξ ορισμού συμπληρωματικοί στα Ορυκτά Αποθέματα.

Για λόγους που αναφέρονται στη πρώτη οδηγία του Άρθρου 30 και σε αυτή τη παράγραφο, οι αναφερόμενες τιμές Ορυκτών Αποθεμάτων δεν μπορούν να προστίθενται στις αναφερόμενες τιμές Ορυκτών Πόρων. Το τελικό αποτέλεσμα είναι παραπλανητικό και πιθανό να παρεξηγηθεί ή, ακόμα πιο σοβαρά, να χρησιμοποιηθεί λανθασμένα για να δώσει μια λάθος εντύπωση των δυνατοτήτων μιας εταιρείας.

32. Ο Πίνακας Β.1 δίνει, συνοπτικά, έναν κατάλογο από τα κύρια κριτήρια που θα πρέπει να εξετάζονται κατά την προετοιμασία αναφορών Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων. Τα κριτήρια αυτά δεν είναι απαραίτητο να σχολιάζονται σε μια Δημόσια Αναφορά εκτός και εάν επηρεάζουν ουσιαστικά την εκτίμηση ή την ταξινόμηση των Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων. Παρόλα αυτά, οι μεταβολές στους οικονομικούς ή πολιτικούς παράγοντες και μόνο μπορεί να είναι η βάση για σημαντικές μεταβολές στα Ορυκτά Αποθέματα και αυτές θα πρέπει να αναφέρονται αναλόγως.

Αναφορά Πόρων και Αποθεμάτων Γαιάνθρακα

33. Τα Άρθρα 34 έως 37 του Κώδικα ασχολούνται με θέματα που σχετίζονται ειδικά με τη Δημόσια Αναφορά Πόρων και Αποθεμάτων Γαιάνθρακα. Εκτός και εάν αναφέρεται διαφορετικά, ισχύουν τα Άρθρα 1 έως 32 αυτού του Κώδικα (συμπεριλαμβανομένου του Σχήμα-τος Β.1). Ο Πίνακας Β.1, ως μέρος των οδηγιών, θα πρέπει επίσης να εξετάζεται επιτακτικά όταν αναφέρονται Πόροι και Αποθέματα Γαιάνθρακα.

Για τους σκοπούς της Δημόσιας Αναφοράς, οι απαιτήσεις για τον γαιάνθρακα είναι γενικά παρόμοιοι εκείνων για άλλα ορυκτά με την αντικατάσταση όρων όπως 'ορυκτό' από τον 'γαιάνθρακα' και της 'περιεκτικότητας' από την 'ποιότητα'. Μπορεί να είναι χρήσιμες και άλλες οδηγίες της βιομηχανίας για την εκτίμηση και αναφορά πόρων και αποθεμάτων *γαιάνθρακα αλλά σε καμιά περίπτωση δεν θα ξεπερνούν σε προτεραιότητα τους στόχους και τον σκοπό του Κώδικα στη δημόσια αναφορά.*

Ο γαιάνθρακας μπορεί να παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις Εθνικές Κυβερνήσεις λόγω της επίδρασης του στον κυβερνητικό σχεδιασμό και τη χρήση της γης. Οι αναφορές προς τις κυβερνήσεις μπορεί να απαιτούν εκτιμήσεις πόρων γαιάνθρακα που δεν περιορίζονται σε βραχυπρόθεσμες και μεσοπρόθεσμες οικονομικές εκτιμήσεις. Τέτοιες αναφορές και εκτιμήσεις στρατηγικών πόρων δεν καλύπτονται από τον Κώδικα Αναφοράς.

34. Οι όροι ‘Ορυκτοί Πόροι’ και ‘Ορυκτά Αποθέματα’ και οι υποδιαιρέσεις αυτών όπως έχουν οριστεί παραπάνω ισχύουν επίσης και στην αναφορά γαιάνθρακα, αλλά εάν προτιμάται από την εταιρεία, μπορούν να αντικατασταθούν από τους όρους ‘Πόροι Γαιάνθρακα’ και ‘Αποθέματα Γαιάνθρακα’ και τις κατάλληλες υποδιαιρέσεις τους.

35. Όταν αναφέρονται αποθέματα γαιάνθρακα, θα πρέπει να γίνεται σαφής διαχωρισμός μεταξύ αποθεμάτων όπου έχουν ληφθεί υπόψη μεταλλευτικές απώλειες (τα οποία περιγράφονται μερικές φορές ως απολήψιμα ή ακαθάριστη παραγωγή ορυχείου) και του τελικού προϊόντος όπου έχουν συμπεριληφθεί απώλειες και μεταλλευτικές αλλά και επεξεργασίας (τα οποία μερικές φορές αναφέρονται ως εμπορικά αποθέματα). Όλα τα αποθέματα, εξ ορισμού, περιλαμβάνουν μεταλλευτικές απώλειες και αραίωση και η χρήση της όποιας περιττής περιγραφής δεν συνίσταται. Ο in-situ γαιάνθρακας είναι, επίσης εξ ορισμού, ένας πόρος. Οι αναφορές δεν πρέπει να περιέχουν συνδυασμένες τιμές Βεβαιωμένων και Πιθανών Αποθεμάτων Γαιάνθρακα εκτός εάν δίνονται οι σχετικές τιμές για τη κάθε κατηγορία ξεχωριστά.

36. Το τελικό προϊόν (ή τα εμπορικά Αποθέματα Γαιάνθρακα), που αντιπροσωπεύει τον εμπλουτισμένο ή αλλιώς βελτιωμένο γαιάνθρακα, μπορεί να αναφέρεται δημοσίως. Όπου αυτό γίνεται, θα πρέπει να δίνονται τα αντίστοιχα απολήψιμα Αποθέματα Γαιάνθρακα και θα πρέπει να αναφέρεται η βάση πρόβλεψης του περιεχομένου του τελικού προϊόντος.

37. Οι σχετικές πληροφορίες για την ποιότητα του γαιάνθρακα θα πρέπει να αναφέρονται για όλες τις κατηγορίες Πόρων Γαιάνθρακα και Αποθεμάτων Γαιάνθρακα συμπεριλαμβάνοντας τη βάση στην οποία υπολογίζονται οι παράμετροι ποιότητας. Όπου είναι απαραίτητο, τα Εμπορικά Αποθέματα Γαιάνθρακα θα πρέπει να υποδιαιρούνται στους κατάλληλους τύπου προϊόντος γαιάνθρακα.

Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της ποιότητας του γαιάνθρακα, όπως για παράδειγμα στη βάση *υγρασίας 'Όπως Λαμβάνεται' ή 'Επί Ξηρού' θα πρέπει να αναφέρονται. Η ποιότητα του γαιάνθρακα θα πρέπει να εκφράζεται σύμφωνα με τις παραμέτρους που είναι σχετικές στις συγκεκριμένες εφαρμογές, πχ. γαιάνθρακας θέρμανσης, μεταλλουργικός γαιάνθρακας κλπ. Η επιλογή των σχετικών παραμέτρων ποιότητας είναι ευθύνη του Αρμόδιου Προσώπου και μπορεί να περιλαμβάνει την τέφρα, το καύσιμο υλικό, το θείο, τη θερμαντική αξία κλπ.*

Η ταξινόμηση πόρων θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη και τη συνέχεια και αξιοπιστία των μετρήσεων πάχους αλλά και την αξιοπιστία και εμπιστοσύνη στις ποιοτικές παραμέτρους, αναγνωρίζοντας ότι η μεταβλητότητα στο πάχος των στρωμάτων και τη ποιότητα δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητες.

Αναφορά Πόρων και Αποθεμάτων Διαμαντιών και Άλλων Πολύτιμών Λίθων

38. Τα Άρθρα 39 και 40 αυτού του Κώδικα εξετάζουν θέματα που σχετίζονται ειδικά με τη Δημόσια Αναφορά Πόρων και Αποθεμάτων Διαμαντιών και άλλων Πολύτιμων Λίθων. Εκτός και εάν δηλώνεται διαφορετικά, ισχύουν τα Άρθρα 1 έως 32 αυτού του Κώδικα (συμπεριλαμβανομένου και του Σχήματος Β.1). Ο Πίνακας Β.1, ως μέρος των οδηγιών, περιέχει περαιτέρω γενικές και ειδικές συμβουλές για τα κριτήρια που πρέπει να εξετάζονται όταν αναφέρονται Πόροι και Αποθέματα Διαμαντιών και άλλων Πολύτιμων Λίθων. Ο όρος 'διαμάντι' σε αυτήν την ενότητα μπορεί να θεωρηθεί ότι καλύπτει και όλους τους άλλους πολύτιμους λίθους.

Για τους σκοπούς της δημόσιας αναφοράς, οι απαιτήσεις για τα διαμάντια και τους άλλους πολύτιμους λίθους είναι γενικά παρόμοιες με τα άλλα ορυκτά με την αντικατάσταση των όρων όπως 'ορυκτό' με 'διαμάντι' και 'περιεκτικότητα' με 'περιεκτικότητα και μέση αξία διαμαντιού'. Ο όρος 'ποιότητα' δεν θα πρέπει να αντικατασταθεί με τον όρο 'περιεκτικότητα', καθώς στα κοιτάσματα διαμαντιού αυτοί οι όροι έχουν ξεκάθαρα διαφορετικές έννοιες. Μπορεί να είναι χρήσιμες και άλλες οδηγίες της βιομηχανίας για την εκτίμηση και αναφορά πόρων και αποθεμάτων διαμαντιού αλλά σε καμιά περίπτωση δεν θα ξεπερνούν σε προτεραιότητα τους στόχους και τον σκοπό του Κώδικα στη Δημόσια Αναφορά.

Ένας αριθμός από χαρακτηριστικά των κοιτασμάτων διαμαντιού είναι διαφορετικά από εκείνα, για παράδειγμα, των τυπικών μεταλλοφόρων κοιτασμάτων και κοιτασμάτων γαιάνθρακα και απαιτούν ειδική εξέταση. Αυτά περιλαμβάνουν το σχετικά χαμηλό ορυκτό περιεχόμενο και μεταβλητότητα των κύριων και προσχωματικών κοιτασμάτων, τη λεπτολογική φύση των διαμαντιών, την ειδική απαίτηση για αξιολόγηση των διαμαντιών και τις εσωτερικές *δυσκολίες και αβεβαιότητες στην εκτίμηση πόρων και αποθεμάτων διαμαντιών.*

39. *Για Δημόσιες Αναφορές που ασχολούνται με διαμάντια είναι απαίτηση του Κώδικα ότι εάν αναφέρεται μια αξιολόγηση ενός πακέτου διαμαντιών, τότε τα πρόσωπα ή οι οργανισμοί που αξιολογούν το πακέτο πρέπει να κατονομάζονται στην αναφορά. Θα πρέπει επίσης να δίνονται λεπτομέρειες για την επαγγελματική εμπειρία του αξιολογητή, την ικανότητα του και την ανεξαρτησία του.*

40. Οι αναφορές σε διαμάντια που ανακτώνται από προγράμματα δειγματοληψίας πρέπει να καθορίζουν το βάρος (σε καράτια) των διαμαντιών που ανακτώνται.

    Η κατανομή μεγέθους λίθων και η τιμή των διαμαντιών και άλλων πολύτιμων λίθων είναι σημαντικά στοιχεία των εκτιμήσεων πόρων και αποθεμάτων. Σε κάποιο αρχικό στάδιο έρευνας, η δειγματοληψία και οι διατρήσεις οριοθέτησης δεν δίνουν αυτές τις πληροφορίες, οι οποίες στηρίζονται σε διατρήσεις μεγάλης διαμέτρου και, ιδιαίτερα, σε δειγματοληψία όγκου.

    Για να δειχθεί ότι ένας πόρος έχει λογικές πιθανότητες για οικονομική εξόρυξη, είναι απαραίτητη κάποια εκτίμηση της πιθανής κατανομής μεγέθους των λίθων και τις τιμής ανεξάρτητα από το πόσο πρώιμη θα είναι. Για τον καθορισμό ενός Υποθετικού Πόρου σε απλά κοιτάσματα μοναδικής φάσης, οι πληροφορίες αυτές λαμβάνονται από αντιπροσωπευτική διάτρηση μεγάλης διαμέτρου. Πιο συχνά, μπορεί να χρησιμοποιείται κάποια μορφή δειγματοληψίας όγκου όπως εκσκαφές και η δημιουργία καναλιών για τη λήψη μεγαλύτερων δειγματοληπτικών πακέτων.

    Για να προχωρήσουμε σε έναν Πιθανό Πόρο, και από εκεί σε ένα Πιθανό Απόθεμα, είναι πιθανό να χρειάζεται πολύ περισσότερη δειγματοληψία όγκου για τον πλήρη καθορισμό των σχέσεων κατανομής μεγέθους λίθων και τιμής. Συνήθως αυτά τα δείγματα όγκου θα λαμβάνονται από υπόγεια ανάπτυξη σχεδιασμένη για τη λήψη επαρκών διαμαντιών για μια αξιόπιστη εκτίμηση της τιμής.

    Σε πολύπλοκα κοιτάσματα, μπορεί να είναι υπερβολικά δύσκολο να βεβαιώσει κανείς ότι τα δείγματα όγκου που λαμβάνονται είναι πραγματικά αντιπροσωπευτικά ολόκληρου του κοιτάσματος. Η έλλειψη αμέσου δειγματοληψίας όγκου, και η αβεβαιότητα στην ένδειξη χωρικής συνέχειας του μεγέθους και της τιμής θα πρέπει να αποδίδονται στην επιλογή της κατάλληλης κατηγορίας πόρων.

Αναφορά Βιομηχανικών Ορυκτών, Λίθων και Προσμιγμάτων

41. Τα Άρθρα 42 έως 44 αυτού του Κώδικα εξετάζουν θέματα σχετικά με τη Δημόσια Αναφορά Βιομηχανικών Ορυκτών, λίθων και προσμιγμάτων όλων των μορφών και άλλα ογκώδη ορυκτά όπως τα

βορικά άλατα, ο τάλκης, ο καολίνης κλπ. που πωλούνται γενικά με βάση τις προδιαγραφές των προϊόντων τους και την αποδοχή της αγοράς. Εκτός και εάν δηλώνεται διαφορετικά, ισχύουν τα Άρθρα 1 έως 32 αυτού του Κώδικα (συμπεριλαμβανομένου και του Σχήματος Β.1). Ο Πίνακας Β.1, ως μέρος των οδηγιών, περιέχει περαιτέρω γενικές και ειδικές συμβουλές για τα κριτήρια που πρέπει να εξετάζονται όταν αναφέρονται Πόροι και Αποθέματα Βιομηχανικών Ορυκτών.

42. Μπορεί να είναι χρήσιμες και άλλες οδηγίες της βιομηχανίας στην εκτίμηση και αναφορά πόρων και αποθεμάτων βιομηχανικών ορυκτών, λίθων και προσμιγμάτων αλλά δεν θα πρέπει σε καμία περίπτωση να ξεπερνούν σε προτεραιότητα τους στόχους και τους σκοπούς αυτού του Κώδικα για δημόσια αναφορά.

43. Σε ότι αφορά τους παράγοντες μετατροπής, οι κανονικές γεωλογικές παράμετροι μπορεί να είναι λιγότερο σημαντικές στην περίπτωση των βιομηχανικών ορυκτών, λίθων και προσμιγμάτων. Παράγοντες όπως η ποιότητα και η δυνατότητα προώθησης στην αγορά είναι σημαντικοί και θα πρέπει να εξεταστούν προσεκτικά πριν τη δήλωση των Ορυκτών Αποθεμάτων.

44. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, η εμπορική ευαισθησία μπορεί να εμποδίσει τη δημοσίευση ποιοτικών παραμέτρων, αλλά σε αυτές τις περιπτώσεις αυτό θα πρέπει να δικαιολογείται ξεκάθαρα στην αναφορά.

Αναφορά Μεταλλοφόρων Υλικών Αναγόμωσης Μετώπων, Δοκών, Μεταλλοφορίας Χαμηλής Περιεκτικότητας, Αποθέσεων Μεταλλεύματος, Στείρων Εξόρυξης και Επεξεργασίας

45. Ο Κώδικας αυτός ισχύει για την αναφορά όλων των πιθανά οικονομικών μεταλλοφόρων υλικών. Σε αυτά μπορεί να περιλαμβάνονται υλικά αναγόμωσης μετώπων, υπολείμματα, δοκοί, μεταλλοφορία χαμηλής περιεκτικότητας, αποθέσεις μεταλλεύματος, στείρων εξόρυξης και επεξεργασίας (υπολειμματικά υλικά) όπου υπάρχουν λογικές πιθανότητες για μελλοντική οικονομική εξόρυξη στην περίπτωση Ορυκτών Πόρων και όπου η εξόρυξη είναι λογικά δικαιολογημένη στην περίπτωση των Ορυκτών Αποθεμάτων. Εκτός και εάν δηλώνεται διαφορετικά, ισχύουν τα Άρθρα 1 έως 32 αυτού του Κώδικα (συμπεριλαμβανομένου και του Σχήματος Β.1).

Οποιαδήποτε υπολειμματικά υλικά όπως περιγράφονται παραπάνω μπορούν να θεωρηθούν παρόμοια στην in-situ μεταλλοφορία για λόγους αναφοράς Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων. Θα *πρέπει να ζητηθεί η γνώμη ενός μεταλλειολόγου ή άλλου σχετικού επαγγελματία όταν γίνονται κρίσεις σχετικές με την εξορυσσιμότητα υλικών αναγόμωσης μετώπων, υπολειμμάτων και δοκών.*

Εάν δεν υπάρχουν λογικές πιθανότητες για οικονομική εξόρυξη όλων ή μέρους των υπολειμματικών υλικών τότε αυτά δεν μπορούν να ταξινομηθούν ως Ορυκτοί Πόροι ή Ορυκτά Αποθέματα.

Εάν κάποιο μέρος των υπολειμματικών υλικών είναι επί του παρόντος μη-οικονομικό, αλλά υπάρχει λογική προσδοκία ότι θα γίνει οικονομικό, τότε το υλικό αυτό μπορεί να ταξινομηθεί ως Ορυκτός Πόρος. Εάν οι τεχνικές και οικονομικές μελέτες έχουν δείξει ότι η οικονομική εξόρυξη μπορεί να δικαιολογηθεί λογικά υπό ρεαλιστικές παραδοχές, τότε το υλικό αυτό μπορεί να ταξινομηθεί ως Ορυκτό Απόθεμα.

Οι παραπάνω οδηγίες ισχύουν εξίσου και για μεταλλοφορία χαμηλής περιεκτικότητας, που συχνά προ-ορίζεται για απόθεση και επεξεργασία κοντά στο τέλος της ζωής του ορυχείου. Για ευκολία στην κατανόηση, οι εκτιμήσεις τονάζ και περιεκτικότητας τέτοιου υλικού θα πρέπει να δίνονται ανά αντικείμενο στις Δημόσιες Αναφορές, παρόλο που μπορούν και να δοθούν συγκεντρωτικά με τις συνολικές τιμές Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων.

Οι αποθέσεις ορίζονται να περιλαμβάνουν επιφανειακές και υπόγειες αποθέσεις, συμπεριλαμβανομένου του εξορυγμένου μεταλλεύματος στα μέτωπα, και μπορούν να περιλαμβάνουν μετάλλευμα το οποίο είναι επί του παρόντος στο σύστημα αποθήκευσης μεταλλεύματος. Το μεταλλοφόρο υλικό το οποίο είναι στη διαδικασία επεξεργασίας (συμπεριλαμβανομένης της εκχείλισης), εάν αναφέρεται, θα πρέπει να αναφέρεται ξεχωριστά.

Πίνακας Β.1: Κατάλογος ελέγχου κριτηρίων εκτίμησης και αναφοράς.

Ο Πίνακας Β.1 είναι ένας κατάλογος ελέγχου και μια οδηγία προς αυτούς που προετοιμάζουν αναφορές Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας, Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων και θα πρέπει να χρησιμοποιείται ως μια αναφορά. Ο κατάλογος ελέγχου δεν είναι επιτακτικός και, όπως πάντα, η σχετικότητα και η ουσιαστικότητα είναι υπερισχύουσες αρχές που καθορίζουν ποιες πληροφορίες θα πρέπει να δημοσιευτούν. Παρόλα αυτά, είναι σημαντικό να αναφέρονται οποιαδήποτε θέματα που μπορεί να επηρεάσουν ουσιαστικά την κατανόηση του αναγνώστη ή την ερμηνεία των αποτελεσμάτων ή εκτιμήσεων που αναφέρονται. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό όπου ανεπαρκή ή αβέβαια δεδομένα επηρεάζουν την αξιοπιστία ή την εμπιστοσύνη σε μια δήλωση Αποτελεσμάτων Έρευνας ή μια εκτίμηση Ορυκτών Πόρων και/ή Ορυκτών Αποθεμάτων.

Η σειρά και η ομαδοποίηση των κριτηρίων του Πίνακα Β.1 αποδίδουν μια κανονική συστηματική προσέγγιση στην έρευνα και αξιολόγηση. Τα κριτήρια της πρώτης ομάδας

'Τεχνικές και Δεδομένα Δειγματοληψίας' ισχύουν για όλες τις επόμενες ομάδες. Στο υπόλοιπο του καταλόγου, τα κριτήρια που δίνονται σε προηγούμενες ομάδες θα ισχύουν συχνά σε επόμενες ομάδες και θα πρέπει να εξετάζονται όταν γίνεται εκτίμηση και αναφορά.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ	ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ
ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ (κριτήρια αυτής της ομάδας ισχύουν και για όλες τις επόμενες ομάδες)	
Τύποι δειγματοληψίας	*Ο τύπος δειγματοληψίας και η θέση του, τα οποία οδηγούν στα αναφερόμενα αποτελέσματα θα πρέπει να αναφέρονται. Οι τύποι δειγματοληψίας περιλαμβάνουν ιζήματα ρευμάτων, δείγματα εδάφους και βαρέων ορυκτών συγκεντρώσεων, εκσκαφές και ορύγματα, ψήγματα βράχων και δειγματοληψία καναλιού, διατρήσεις, ελικοειδείς διατρήσεις κλπ. Στα παραδείγματα θέσεων περιλαμβάνονται παλαιά έργα, αποθέσεις ορυχείων κλπ. Όπου είναι δυνατό θα πρέπει να αναφέρεται το διάστημα αυτών των δειγμάτων.*
Τεχνικές διάτρησης	*Ο τύπος διάτρησης (πχ. πυρήνα, αντιστρόφου κυκλοφορίας, κλπ.) και οι λεπτομέρειες (πχ. διάμετρος πυρήνα). Τα μέτρα που λαμβάνονται για τη μεγιστοποίηση της απόληψης δείγματος και για την επιβεβαίωση της αντιπροσωπευτικής φύσης των δειγμάτων.*
Καταγραφή	*Κατά πόσο τα δείγματα έχουν καταγραφεί σε επίπεδο λεπτομέρειας που να στηρίζει την κατάλληλη εκτίμηση Ορυκτών Πόρων, τις μεταλλευτικές και μεταλλουργικές μελέτες. Εάν η καταγραφή είναι ποιοτικής ή ποσοτικής φύσης. Φωτογραφία πυρήνων (ή ορυγμάτων, καναλιών κλπ.)*
Απόληψη διατρητικού δείγματος	*Κατά πόσο έχουν σωστά καταγραφεί οι απολήψεις δείγματος και έχουν αξιολογηθεί τα αποτελέσματα. Ιδιαίτερα, κατά πόσο υπάρχει σχέση μεταξύ απόληψης δείγματος και μεροληπτικού σφάλματος περιεκτικότητας (πχ. μεροληπτική απώλεια / κέρδος λεπτού / χονδρού υλικού).*
Άλλες τεχνικές δειγματοληψίας	*Η φύση και ποιότητα της δειγματοληψίας (πχ. κανάλια κοπής, τυχαία ψήγματα κλπ.) και τα μέτρα που λαμβάνονται για να βεβαιωθεί η αντιπροσωπευτικότητα των δειγμάτων. Ακριβής τοποθέτηση και μοναδική αρίθμηση κάθε δείγματος.*
Δεδομένα αναλύσεων και εργαστηριακή διερεύνηση	*Η φύση, η ποιότητα και καταλληλότητα των αναλυτικών και εργαστηριακών διαδικασιών που χρησιμοποιούνται και το κατά πόσο η τεχνική θεωρείται μερική ή συνολική. Η φύση των διαδικασιών ελέγχου ποιότητας που εφαρμόζονται (πχ. τα πρότυπα, τα κενά, οι διπλές τιμές, οι εξωεργαστηριακοί έλεγχοι) και το κατά πόσο επιτυγχάνονται αποδεκτά επίπεδα ακρίβειας (δηλαδή έλλειψης μεροληπτικού σφάλματος) και πιστότητας.*
Τεχνικές υπο-δειγματοληψίας και	*Εάν λαμβάνεται πυρήνας, είτε κομμένος ή πριονισμένος ή σε τέταρτο, μισό ή ολόκληρο. Εάν λαμβάνεται μη-πυρηνικό δείγμα, είναι ράβδου, σωληνωτό, περιστροφικού διαχωρισμού κλπ. και εάν είναι*

προετοιμασία δείγματος	*διαχωρισμού στερεού ή υγρού. Για όλους τους τύπους δείγματος, η φύση, η ποιότητα και η καταλληλότητα της τεχνικής προετοιμασίας δείγματος. Οι διαδικασίες ελέγχου ποιότητας που εφαρμόζονται σε όλα τα στάδια υπο-δειγματοληψίας για τη μεγιστοποίηση της αντιπροσωπευτικότητας. Τα μέτρα που λαμβάνονται για να βεβαιωθεί ότι η δειγματοληψία είναι αντιπροσωπευτική του in-situ υλικού που συλλέγεται. Κατά πόσο τα μεγέθη δείγματος είναι κατάλληλα ως προς το μέγεθος των κόκκων του υλικού που λαμβάνονται δείγματα. Προτείνεται μια δήλωση ως προς τα μέτρα ασφάλειας που λαμβάνονται για τη διατήρηση της ακεραιότητας των δειγμάτων.*
Επαλήθευση των αποτελεσμάτων	*Η επαλήθευση επιλεγμένων διαστημάτων από ανεξάρτητο ή εναλλακτικό προσωπικό. Η χρήση δίδυμων διατρήσεων, εκτροπών ή διπλών δειγμάτων.*
Θέσεις δεδομένων	*Η ακρίβεια και ποιότητα των οδεύσεων που χρησιμοποιούνται για την τοποθέτηση διατρήσεων (οδεύσεις κολάρου και κατά μήκος άξονα διάτρησης), ορυγμάτων, εκσκαφών και άλλων θέσεων που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση Ορυκτών Πόρων. Η ποιότητα και επάρκεια του τοπογραφικού ελέγχου. Χάρτες περιοχής.*
Πυκνότητα και κατανομή δεδομένων	*Η πυκνότητα δεδομένων για αναφορά Αποτελεσμάτων Έρευνας. Κατά πόσο η πυκνότητα και η κατανομή των δεδομένων είναι επαρκείς για τον καθορισμό του κατάλληλου βαθμού γεωλογικής συνέχειας και συνέχειας περιεκτικότητας για τη διαδικασία εκτίμησης και ταξινόμησης Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων που εφαρμόζεται. Εάν εφαρμόζεται σύνθεση δειγμάτων.*
Αρχεία αναφορών	*Η τεκμηρίωση των αρχικών δεδομένων, των διαδικασιών εισαγωγής δεδομένων, επαλήθευσης δεδομένων, αποθήκευσης δεδομένων (φυσικής ή ηλεκτρονικής) για την προετοιμασία της αναφοράς.*
Έλεγχοι ή αναθεωρήσεις	*Τα αποτελέσματα οποιωνδήποτε ελέγχων και αναθεωρήσεων των τεχνικών και δεδομένων δειγματοληψίας.*

ΑΝΑΦΟΡΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ (τα κριτήρια που δίνονται στην προηγούμενη ομάδα ισχύουν και σε αυτήν την ομάδα)	
Μεταλλευτικά δικαιώματα και ιδιοκτησία γης	*Ο τύπος, το όνομα / ο αριθμός αναφοράς, η θέση και η ιδιοκτησία συμπεριλαμβανομένων των συμφωνιών ή θεμάτων ουσίας με τρίτους όπως κοινές επιχειρήσεις, συνεταιρισμοί, ιστορικά μνημεία, άγρια φύση ή εθνικά πάρκα και περιβαλλοντικές ρυθμίσεις. Ιδιαίτερα η ασφάλεια του εξασφαλισμένου χρονικού διαστήματος αναφοράς καθώς και οποιαδήποτε γνωστά εμπόδια στη λήψη άδειας λειτουργίας στη περιοχή. Χάρτες θέσης των μεταλλευτικών δικαιωμάτων και τίτλων. Δεν αναμένεται η περιγραφή του μεταλλευτικού τίτλου σε μια τεχνική αναφορά να είναι νομική άποψη, αλλά θα πρέπει να είναι μια σύντομη και ξεκάθαρη περιγραφή αυτού του τίτλου όπως γίνεται κατανοητή από τον συγγραφέα.*
Ερευνητική εργασία που εκτελέστηκε από τρίτους	*Αναγνώριση και αξιολόγηση της έρευνας από τρίτους.*
Γεωλογία	*Περιγραφή της φύσης, λεπτομέρειας, και αξιοπιστίας των γεωλογικών πληροφοριών (τύποι πετρωμάτων, δομή, μεταμόρφωση, μεταλλοφορία, και σχέση με γνωστές ζώνες μεταλλοφορίας, κλπ.). Περιγραφή γεωφυσικών και γεωχημικών δεδομένων. Θα πρέπει να υπάρχουν αξιόπιστοι γεωλογικοί χάρτες και τομές για να στηρίξουν τις ερμηνείες.*
Μέθοδοι σύνθεσης δεδομένων (συγκέντρωση)	*Στην αναφορά Αποτελεσμάτων Έρευνας, οι τεχνικές κινητού μέσου, οι αποκλεισμοί μέγιστης και/ή ελάχιστης περιεκτικότητας (πχ. αποκλεισμός υψηλών περιεκτικοτήτων) και τα ελάχιστα όρια εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας είναι συνήθως ουσιώδη και θα πρέπει να αναφέρονται. Όπου τα σύνθετα διαστήματα περιλαμβάνουν μικρά μήκη αποτελεσμάτων υψηλής περιεκτικότητας και μεγαλύτερα μήκη αποτελεσμάτων χαμηλής περιεκτικότητας, θα πρέπει να αναφέρεται η διαδικασία αυτής της σύνθεσης και να δίνονται λεπτομερώς τυπικά παραδείγματα τέτοιων σύνθετων δειγμάτων. Θα πρέπει να αναφέρονται ξεκάθαρα οι παραδοχές που γίνονται σε οποιαδήποτε αναφορά ισοδύναμων τιμών μετάλλου.*
Σχέση μεταξύ πλάτους μεταλλοφορίας και μήκους διαστημάτων	*Οι σχέσεις αυτές είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην αναφορά Αποτελεσμάτων Έρευνας. Εάν είναι γνωστή η γεωμετρία της μεταλλοφορίας ως προς τη γωνία της γεώτρησης, θα πρέπει να αναφέρονται τα χαρακτηριστικά της. Εάν δεν είναι γνωστή και αναφέρονται μόνο τα διαστήματα κατά μήκος του άξονα της γεώτρησης, θα πρέπει να υπάρχει μια ξεκάθαρη δήλωση αυτού του γεγονότος (πχ. μήκος κατά τον άξονα της γεώτρησης, άγνωστο πραγματικό πάχος).*
Διαγράμματα	*Όπου είναι δυνατό, θα πρέπει να περιλαμβάνονται χάρτες, σχέδια και*

	τομές (με κλίμακες) και πίνακες των διαστημάτων για οποιαδήποτε ουσιαστική ανακάλυψη που αναφέρεται εφόσον αυτά τα διαγράμματα ξεκαθαρίζουν σημαντικά την αναφορά.
Ισορροπημένη αναφορά	*Όπου είναι ανέφικτη η ολοκληρωμένη αναφορά όλων των Αποτελεσμάτων Έρευνας, θα πρέπει να γίνεται αντιπροσωπευτική αναφορά χαμηλών και υψηλών περιεκτικοτήτων και/ή διαστημάτων για την αποφυγή παραπλανητικής αναφοράς των Αποτελεσμάτων Έρευνας.*
Άλλα ουσιαστικά δεδομένα έρευνας	*Θα πρέπει να αναφέρονται και άλλα δεδομένα έρευνας, εάν είναι ουσιαστικά και έχουν νόημα, συμπεριλαμβανομένων (αλλά όχι περιορισμένων): των γεωλογικών παρατηρήσεων, αποτελεσμάτων γεωφυσικής διασκόπησης, αποτελεσμάτων γεωχημικής διασκόπησης, δείγματα όγκου – μέγεθος και μέθοδος επεξεργασίας, αποτελέσματα μεταλλουργικών δοκιμών, πυκνότητα όγκου, υπόγεια ύδατα, γεωτεχνικά και βραχομηχανικά χαρακτηριστικά, πιθανά δηλητηριώδεις ή μολυντικές ουσίες.*
Περαιτέρω εργασία	*Η φύση και η κλίμακα σχεδιασμένης μελλοντικής εργασίας (πχ. επιπρόσθετη έρευνα). Περιβαλλοντικές περιγραφές αναμενόμενων εκκρεμοτήτων.*
ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΦΟΡΑ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ (τα κριτήρια που δίνονται στην πρώτη ομάδα, και όπου είναι σχετικά στη δεύτερη ομάδα, ισχύουν επίσης σε αυτή την ομάδα)	
Ακεραιότητα βάσης δεδομένων	*Τα μέτρα που λαμβάνονται για να βεβαιωθεί ότι τα δεδομένα δεν έχουν αλλοιωθεί, για παράδειγμα, από λάθη πληκτρολόγησης ή μεταφοράς, μεταξύ της αρχικής τους συλλογής και της χρήσης τους για σκοπούς εκτίμησης Ορυκτών Πόρων. Οι διαδικασίες επαλήθευσης και/ή επικύρωσης που χρησιμοποιούνται.*
Γεωλογική ερμηνεία	*Η περιγραφή του γεωλογικού μοντέλου και τα συμπεράσματα που βγαίνουν από αυτό. Η συζήτηση της επάρκειας της πυκνότητας δεδομένων για την εγγύηση της συνέχειας της μεταλλοφορίας και την παροχή επαρκούς βάσης δεδομένων για τη χρησιμοποιούμενη διαδικασία εκτίμησης. Η συζήτηση εναλλακτικών ερμηνειών και η πιθανή επιρροή τους στην εκτίμηση.*
Τεχνικές εκτίμησης και μοντελοποίησης	*Η φύση και καταλληλότητα των τεχνικών εκτίμησης που εφαρμόζονται και οι κύριες παραδοχές, συμπεριλαμβανομένης της αντιμετώπισης ακραίων τιμών περιεκτικότητας, του διαχωρισμού σε ζώνες, τις παραμέτρους παρεμβολής, της μέγιστης απόστασης προβολής από τα δεδομένα σημεία. Η διαθεσιμότητα εκτιμήσεων ελέγχου, οι προηγούμενες εκτιμήσεις και/ή καταγραφές μεταλλευτικής παραγωγής και το κατά πόσο η εκτίμηση Ορυκτών Πόρων λαμβάνουν αναλόγως υπόψη τέτοια δεδομένα. Οι παραδοχές που γίνονται σχετικά με την απόληψη παραπροϊόντων. Στην περίπτωση παρεμβολής σε μοντέλο μπλοκ, το μέγεθος των μπλοκ σε σχέση με τη μέση απόσταση δειγμάτων και την περιοχή ανίχνευσης που*

	χρησιμοποιείται. Οποιεσδήποτε παραδοχές πίσω από τη μοντελοποίηση επιλεκτικών μονάδων εξόρυξης (πχ. μη-γραμμικό kriging). Η διαδικασία επικύρωσης, η χρησιμοποιούμενη διαδικασία ελέγχου, η σύγκριση δεδομένων μοντέλου και γεωτρητικών δεδομένων, και η χρήση δεδομένων συμφιλίωσης όπου διατίθενται. Λεπτομερής περιγραφή της μεθόδου που χρησιμοποιείται και των παραδοχών που γίνονται για την εκτίμηση των τονάζ και περιεκτικοτήτων (τομών, πολυγώνων, αντιστρόφου αποστάσεως, γεωστατιστική, ή άλλη μέθοδος). Περιγραφή του τρόπου που χρησιμοποιείται η γεωλογική ερμηνεία για τον έλεγχο των εκτιμήσεων πόρων. Συζήτηση της βάσης στην οποία γίνεται ή δεν γίνεται αποκλεισμός ή διαγραφή περιεκτικοτήτων. Εάν έχει επιλεγεί μια μέθοδος υπολογιστή, περιγραφή των προγραμμάτων και των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν. Οι γεωστατιστικές μέθοδοι ποικίλουν σε ακραίο βαθμό και θα πρέπει να περιγράφονται με λεπτομέρεια. Η μέθοδος που επιλέγεται θα πρέπει να δικαιολογείται. Οι γεωστατιστικές παράμετροι, συμπεριλαμβανομένου του βαριογράμματος, και η συμβατότητα τους με τη γεωλογική ερμηνεία θα πρέπει να αναλύονται. Θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η εμπειρία που κερδίζεται από την εφαρμογή γεωστατιστικής σε παρόμοια κοιτάσματα.
Όρια και παράμετροι ελάχιστης εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας	*Η βάση των εφαρμοζόμενων ορίων εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας ή των ποιοτικών παραμέτρων, συμπεριλαμβανομένης της βάσης, εφόσον είναι κατάλληλο, των αντίστοιχων εξισώσεων ισοδύναμου μετάλλου.*
Μεταλλευτικοί παράγοντες ή παραδοχές	*Η προτεινόμενη μέθοδος εξόρυξης και η καταλληλότητα της στον τύπο μεταλλοφορίας, συμπεριλαμβανομένων των ελάχιστων διαστάσεων εξόρυξης και της εσωτερικής (ή, όπου αρμόζει, της εξωτερικής) αραίωσης εξόρυξης. Μπορεί να μην είναι πάντα δυνατό να γίνονται λεπτομερής υποθέσεις σχετικά με τους μεταλλευτικούς παράγοντες όταν εκτιμώνται οι Ορυκτοί Πόροι. Για να αποδοθούν ρεαλιστικές πιθανότητες μελλοντικής οικονομικής εξόρυξης, είναι απαραίτητες κάποιες βασικές παραδοχές. Παραδείγματα αυτών είναι θέματα πρόσβασης (φρεάτια, κεκλιμένα κλπ.), γεωτεχνικές παράμετροι (κλίσεις πρανών, διαστάσεις μετώπων κλπ.), απαιτήσεις υποδομής και εκτιμώμενα έξοδα εξόρυξης. Όλες οι παραδοχές θα πρέπει να δηλώνονται ξεκάθαρα.*
Μεταλλουργικοί παράγοντες ή παραδοχές	*Η μεταλλουργική διαδικασία που προτείνεται και η καταλληλότητα της στον τύπο μεταλλοφορίας. Μπορεί να μην είναι πάντα δυνατό να γίνονται λεπτομερής υποθέσεις σχετικά με τις διαδικασίες μεταλλουργικής επεξεργασίας όταν αναφέρονται Ορυκτοί Πόροι. Για να αποδοθούν ρεαλιστικές πιθανότητες μελλοντικής οικονομικής εξόρυξης, είναι απαραίτητες κάποιες βασικές παραδοχές. Παραδείγματα αυτών είναι το εύρος της εργασίας μεταλλουργικών*

	δοκιμών, παράγοντες απόληψης, ανοχές για ποσοστά παραπροϊόντων ή δηλητηριωδών στοιχείων, απαιτήσεις υποδομής και εκτιμώμενα έξοδα επεξεργασίας. Όλες οι παραδοχές θα πρέπει να δηλώνονται ξεκάθαρα.
Παράγοντες τονάζ (πυκνότητες όγκου in-situ)	*Κατά πόσο υποθέτονται ή καθορίζονται. Εάν υποθέτονται, η βάση αυτών των υποθέσεων. Εάν καθορίζονται, η μέθοδος που χρησιμοποιείται, η συχνότητα των μετρήσεων, η φύση, το μέγεθος και η αντιπροσωπευτικότητα των δειγμάτων.*
Ταξινόμηση	*Η βάση για την ταξινόμηση των Ορυκτών Πόρων σε κατηγορίες μεταβαλλόμενης εμπιστοσύνης. Κατά πόσο έχουν ληφθεί υπόψη όλοι οι σχετικοί παράγοντες, δηλαδή η σχετική εμπιστοσύνη στους υπολογισμούς τονάζ / περιεκτικότητας, η εμπιστοσύνη στη συνέχεια της γεωλογίας και των τιμών μετάλλου, η ποιότητα, ποσότητα και κατανομή των δεδομένων. Κατά πόσο το αποτέλεσμα ανταποκρίνεται κατάλληλα στην άποψη του Αρμόδιου Προσώπου για το κοίτασμα.*
Έλεγχοι ή αναθεωρήσεις	*Τα αποτελέσματα οποιονδήποτε ελέγχων η αναθεωρήσεων των εκτιμήσεων Ορυκτών Πόρων.*
Άλλα	*Οποιαδήποτε πιθανά εμπόδια στην εκμετάλλευση όπως πρόσβαση στη γη, περιβαλλοντική ή νομική άδεια. Χάρτες θέσης των μεταλλευτικών δικαιωμάτων και τίτλων.*

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΦΟΡΑ ΟΡΥΚΤΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ (κριτήρια που δίνονται στην πρώτη ομάδα, και όπου είναι σχετικό στις άλλες προηγούμενες ομάδες, ισχύουν επίσης σε αυτήν την ομάδα)	
Εκτίμηση Ορυκτών Πόρων για μετατροπή σε Ορυκτά Αποθέματα	*Περιγραφή της εκτίμησης Ορυκτών Πόρων που χρησιμοποιείται ως βάση για τη μετατροπή σε Ορυκτά Αποθέματα. Ξεκάθαρη δήλωση του κατά πόσο οι Ορυκτοί Πόροι αναφέρονται συμπληρωματικά με, ή ως μέρος των Ορυκτών Αποθεμάτων.*
Όρια ή παράμετροι ελάχιστης εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας	*Η βάση των ελάχιστων ορίων εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας ή των παραμέτρων ποιότητας που εφαρμόζονται, συμπεριλαμβανομένης της βάσης, όπου είναι απαραίτητη, των εξισώσεων ισοδύναμου μετάλλου. Η παράμετρος ορίων εκμετάλλευσης μπορεί να είναι η οικονομική τιμή ανά μπλοκ παρά η περιεκτικότητα.*
Μεταλλευτικοί παράγοντες ή παραδοχές	*Η μέθοδος και οι παραδοχές που χρησιμοποιούνται στη μετατροπή του Ορυκτού Πόρου σε ένα Ορυκτό Απόθεμα (δηλαδή είτε η εφαρμογή των κατάλληλων παραγόντων με βελτιστοποίηση ή με αρχική ή λεπτομερή σχεδίαση). Η επιλογή, η φύση και η καταλληλότητα των επιλεγμένων μεθόδων εξόρυξης και άλλων μεταλλευτικών παραμέτρων συμπεριλαμβανομένων σχετικών θεμάτων σχεδίασης όπως η προ-αποκάλυψη, η πρόσβαση, κλπ. Οι παραδοχές που γίνονται σχετικά με τις γεωτεχνικές παραμέτρους (πχ. κλίσεις πρανών, διαστάσεις μετώπων, κλπ.), τον έλεγχο ποιότητας και τις διατρήσεις προ-παραγωγής. Οι κύριες παραδοχές που γίνονται και*

	το μοντέλο Ορυκτών Πόρων που χρησιμοποιείται για τη βελτιστοποίηση εκμετάλλευσης (όπου εφαρμόζεται). Οι παράγοντες μεταλλευτικής αραίωσης, οι παράγοντες μεταλλευτικής απόληψης, και τα ελάχιστα πλάτη εξόρυξης που χρησιμοποιούνται καθώς και οι απαιτήσεις υποδομής των επιλεγμένων μεθόδων εκμετάλλευσης. Όπου είναι διαθέσιμη, η ιστορική αξιοπιστία των παραμέτρων απόδοσης.
Μεταλλουργικοί παράγοντες ή παραδοχές	*Η προτεινόμενη μεταλλουργική διαδικασία και η καταλληλότητα αυτής της διαδικασίας στον τύπο μεταλλοφορίας. Κατά πόσο η μεταλλουργική διαδικασία αποτελεί καλά δοκιμασμένη τεχνολογία ή καινοτομία. Η φύση, η ποσότητα και αντιπροσωπευτικότητα της εργασίας μεταλλουργικών δοκιμών που γίνεται και οι παράγοντες μεταλλουργικής απόληψης που χρησιμοποιούνται. Οποιεσδήποτε παραδοχές ή ανοχές γίνονται για δηλητηριώδη στοιχεία. Η ύπαρξη οποιουδήποτε δείγματος όγκου ή δοκιμαστικής εργασίας πιλοτικής κλίμακας και ο βαθμός στον οποίο τα δείγματα αυτά είναι αντιπροσωπευτικά ολόκληρου του σώματος μεταλλοφορίας. Τα τονάζ και οι περιεκτικότητες που αναφέρονται για Ορυκτά Αποθέματα θα πρέπει να ξεκαθαρίζουν κατά πόσο αφορούν υλικό πριν την επεξεργασία ή μετά την απόληψη. Σχολιασμός του υπάρχοντος εργοστασίου και εξοπλισμού, συμπεριλαμβανομένων ενδείξεων τιμών αντικατάστασης και μεταπώλησης.*
Παράγοντες κόστους και εσόδων	*Η κατάληξη ή η αποδοχή παραδοχών σχετικά με το προβλεπόμενο κόστος κεφαλαίου και λειτουργίας. Οι παραδοχές που γίνονται σχετικά με τα έσοδα συμπεριλαμβανομένης της τελικής περιεκτικότητας, των τιμών μετάλλου ή ορυκτού, των αναλογιών μετατροπής συναλλάγματος, του κόστους μεταφοράς και επεξεργασίας, των προστίμων, κλπ. Οι ανοχές που γίνονται για κρατήσεις από την Κυβέρνηση και από ιδιώτες. Τα βασικά στοιχεία ισοζυγίου για μια δεδομένη περίοδο.*
Εκτίμηση αγοράς	*Η κατάσταση της ζήτησης, προσφοράς και αποθεμάτων για το συγκεκριμένο ορυκτό, οι τάσεις κατανάλωσης και παράγοντες που πιθανό να επηρεάσουν την προσφορά και ζήτηση στο μέλλον. Μια ανάλυση πελατών και ανταγωνιστών μαζί με την αναγνώριση πιθανών παράθυρων στην αγορά για το προϊόν. Προβλέψεις τιμής και ποσότητας και η βάση αυτών των προβλέψεων.*
Άλλα	*Η επίδραση, εάν υπάρχει, των παραγόντων φυσικής επικινδυνότητας, υποδομής, περιβαλλοντικών, νομικών, προώθησης προϊόντος, κοινωνικών και κυβερνητικών στην πιθανή βιωσιμότητα ενός έργου και/ή στην εκτίμηση και ταξινόμηση των Ορυκτών Αποθεμάτων. Η κατάσταση των τίτλων και των εγκρίσεων που είναι κρίσιμες για τη βιωσιμότητα του έργου, όπως άδειες εκμετάλλευσης, άδειες εκπομπής, κυβερνητικές και νομικές εγκρίσεις. Περιβαλλοντικές περιγραφές αναμενόμενων εκκρεμοτήτων. Χάρτες θέσεων μεταλλευτικών δικαιωμάτων και τίτλων.*

Ταξινόμηση	*Η βάση για την ταξινόμηση Ορυκτών Αποθεμάτων σε κατηγορίες διαφορετικής εμπιστοσύνης. Κατά πόσο το αποτέλεσμα ανταποκρίνεται κατάλληλα στην άποψη του Αρμόδιου Προσώπου για το κοίτασμα. Το ποσοστό των Πιθανών Ορυκτών Αποθεμάτων που προήλθαν από τους Μετρημένους Ορυκτούς Πόρους (εφόσον υπάρχουν).*
Έλεγχοι ή αναθεωρήσεις	*Τα αποτελέσματα οποιονδήποτε ελέγχων ή αναθεωρήσεων των εκτιμήσεων Ορυκτών Αποθεμάτων.*
ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΦΟΡΑ ΜΕΤΑΛΛΟΦΟΡΙΑΣ ΔΙΑΜΑΝΤΙΩΝ (τα κριτήρια που δίνονται στην πρώτη ομάδα και όπου είναι σχετικά των άλλων προηγούμενων ομάδων, ισχύουν επίσης σε αυτήν την ομάδα)	
Συλλογή δειγμάτων	*Ο τύπος και ο σκοπός του δείγματος, πχ. γεωτρήσεις μεγάλης διαμέτρου για καθορισμό του αριθμού λίθων ανά μονάδα όγκου ή δείγματα όγκου για τον καθορισμό της κατανομής μεγέθους λίθων. Μέγεθος δείγματος, κατανομή και αντιπροσωπευτικότητα.*
Επεξεργασία δειγμάτων	*Τύπος εργοστάσιου, ρυθμός επεξεργασίας, και πιστοποίηση. Μείωση μεγέθους δείγματος. Μέγεθος κάτω κόσκινου, μέγεθος άνω κόσκινου και επανάληψη θραύσης. Διαδικασίες (διαχωρισμός πυκνών μέσων, λίπανση, ακτίνες Χ, χειρονακτική διαλογή κλπ.) Αποτελεσματικότητα διαδικασίας, εξέταση στείρων επεξεργασίας και κοκκομετρία. Το εργαστήριο που χρησιμοποιείται, ο τύπος επεξεργασίας για τα μικρο-διαμάντια και η πιστοποίηση.*
Εκτίμηση περιεκτικότητας	*Μικρο- και μάκρο- διαμάντια ανά φάση. Αποτελέσματα δειγματοληψίας όγκου, συνολική περιεκτικότητα ανά φάση. Χωρική δομική ανάλυση και κατανομή περιεκτικότητας. Κατανομή μεγέθους και πλήθους λίθων. Κοκκομετρία αρχικής τροφοδοσίας δειγμάτων και στείρων επεξεργασίας. Καθορισμός πυκνότητας δείγματος. Ποσοστό συμπύκνωσης και κατώτερων μεγεθών ανά δείγμα. Η περιεκτικότητα με την αλλαγή στο Κάτω Οριακό Μέγεθος Κόσκινου. Οι γεωστατιστικές τεχνικές που εφαρμόζονται. Οι ρυθμίσεις που γίνονται στην κατανομή μεγέθους για την εργοστασιακή απόδοση δείγματος σε εμπορική κλίμακα.*
Εκτίμηση αξίας	*Οι ποσότητες διαμαντιών ανά φάση ή βάθος. Λεπτομέρειες του πακέτου που αξιολογείται, το πλήθος των λίθων, τα καράτια και η κατανομή μεγέθους. Εκτίμηση της τιμής με το μέγεθος. Αξιολόγηση των ρωγμών των διαμαντιών. Μέση τιμή $/καράτι και $/τόνο με μεταβολή του κάτω ορίου. Ελάχιστο μέγεθος πακέτου για αντιπροσωπευτική αξιολόγηση.*
Ασφάλεια και ακεραιότητα	*Πιστοποιημένη διαδικασία ελέγχου. Κατά πόσο τα δείγματα σφραγίστηκαν μετά την εξόρυξη. Η τοποθεσία του αξιολογητή, η συνοδεία, η παράδοση, οι απώλειες καθαρισμού, η συμφιλίωση με τα καταγραμμένα καράτια δείγματος και το πλήθος των λίθων. Δείγματα πυρήνα που πλένονται πριν την επεξεργασία για μικρο-διαμάντια. Τα δείγματα ελέγχου επεξεργάζονται σε εναλλακτική μονάδα*

	επεξεργασίας. Τα αποτελέσματα ελέγχου στείρων επεξεργασίας. Η ανάκτηση των στοιχείων ανίχνευσης στη δειγματοληψία και την επεξεργασία. Γεωφυσική πυκνότητα (καταγραμμένη) και πυκνότητα σωματιδίων. Δια-επικύρωση του βάρους των δειγμάτων, υγρής και ξηρής, με όγκο και πυκνότητα διάτρησης, συντελεστής υγρασίας.
Ταξινόμηση	*Εξετάστε τα στοιχεία αβεβαιότητας στις εκτιμήσεις και αναπτύξτε την ταξινόμηση ανάλογα. Επιπλέον των γενικών απαιτήσεων για αξιολόγηση του όγκου και της πυκνότητας είναι απαραίτητο να συσχετιστεί η συχνότητα των λίθων (λίθοι ανά κυβικό μέτρο ή τόνο) με το μέγεθος λίθου (καράτια ανά λίθο) για να υπολογιστεί η περιεκτικότητα (καράτια ανά τόνο). Η αξία ανά καράτι είναι κρίσιμης σημασίας στην παρουσίαση των ορυκτών αποθεμάτων και επομένως της αξίας του έργου.*

Παράρτημα Β.1 – Συμπληρωματικές Κατηγορίες UNFC

Οι επιπρόσθετες τρεις κατηγορίες που δίνονται παρακάτω περιλαμβάνονται μόνο πληροφοριακά και δεν αποτελούν μέρος του Κώδικα ή των Οδηγιών. Είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για σκοπούς κυβερνητικού σχεδιασμού, ο οποίος θα περιλάμβανε μελλοντική χρήση γης ή στρατηγικά ορυκτά αποθέματα. Οι κατηγορίες αυτές αναφέρονται σε υλικό που είναι είτε φτωχά καθορισμένο ή που έχει δειχθεί από κατάλληλες τεχνικές και οικονομικές μελέτες ότι είναι επί του παρόντος μη οικονομικό, αλλά πιθανό να γίνει οικονομικά βιώσιμο στο μέλλον. Δεν είναι στόχος να χρησιμοποιούνται αυτές οι κατηγορίες για μη-κυβερνητικές επενδύσεις και αποφάσεις.

Ορυκτός Πόρος Αναγνώρισης

Ένας ‘Ορυκτός Πόρος Αναγνώρισης’ βασίζεται σε τοπικές γεωλογικές μελέτες και χαρτογραφικές, εναέριες και έμμεσες μεθόδους, προκαταρκτική έρευνα πεδίου, καθώς και γεωλογικά συμπεράσματα και παρέκταση. Ο στόχος είναι να αναγνωριστούν περιοχές αυξημένου ορυκτού δυναμικού άξιων περαιτέρω έρευνας προς την αναγνώριση κοιτάσματος. Το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι χαμηλότερο από αυτό που εφαρμόζεται σε έναν Υποθετικό Ορυκτό Πόρο και είναι συνήθως ανεπαρκές για να σημειωθούν τιμές τονάζ και περιεκτικότητας. Κωδικός UNFC 334.

Οι εκτιμήσεις ποσότητας που βασίζονται σε περιορισμένες πληροφορίες και αναλογίες με γνωστά κοιτάσματα παρόμοιου γεωλογικού χαρακτήρα μπορεί να είναι δυνατές αλλά ανεπαρκείς για ταξινόμηση Υποθετικών Ορυκτών Πόρων.

Ορυκτός Πόρος Προ-σκοπιμότητας

Ένας ‘Ορυκτός Πόρος Προ-σκοπιμότητας’ είναι εκείνο το μέρος ενός Πιθανού, και σε μερικές περιπτώσεις ενός Μετρημένου, Ορυκτού Πόρου που έχει δειχθεί μετά από μια Μελέτη Προ-σκοπιμότητας ότι είναι μη οικονομικά εξορύξιμος. Η Μελέτη Προ-σκοπιμότητας θα έχει συμπεριλάβει την εξέταση ρεαλιστικά υποτιθέμενων μεταλλευτικών, μεταλλουργικών, οικονομικών, προώθησης προϊόντος, νομικών,

περιβαλλοντικών, κοινωνικών και κυβερνητικών παραγόντων, αλλά θα έχει δείξει ότι τη στιγμή της αναφοράς η εξόρυξη δεν είναι δικαιολογημένη. Το υλικό αυτό αναγνωρίζεται ως πιθανά οικονομικά βιώσιμο με κάποιες μεταβολές στις τεχνολογικές, οικονομικές, περιβαλλοντικές και/ή άλλες σχετικές συνθήκες. Κωδικός UNFC: 221 + 222.

Ένας Ορυκτός Πόρος Προ-σκοπιμότητας έχει χαμηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης από έναν Ορυκτό Πόρο Σκοπιμότητας.

Ορυκτός Πόρος Σκοπιμότητας

Ένας 'Ορυκτός Πόρος Σκοπιμότητας είναι εκείνο το μέρος ενός Μετρημένου Ορυκτού Πόρου, για το οποίο έχει δειχθεί, μετά από μια Μελέτη Σκοπιμότητας, ότι δεν είναι οικονομικά εκμεταλλεύσιμος. Η Μελέτη Σκοπιμότητας θα έχει συμπεριλάβει την εξέταση ρεαλιστικά υποτιθέμενων μεταλλευτικών, μεταλλουργικών, οικονομικών, προώθησης προϊόντος, νομικών, περιβαλλοντικών, κοινωνικών και κυβερνητικών παραγόντων, αλλά θα έχει δείξει ότι τη στιγμή της αναφοράς η εξόρυξη δεν είναι δικαιολογημένη. Το υλικό αυτό αναγνωρίζεται ως πιθανά οικονομικά βιώσιμο με κάποιες μεταβολές στις τεχνολογικές, οικονομικές, περιβαλλοντικές και/ή άλλες σχετικές συνθήκες. Κωδικός UNFC: 211.

Η πλήρης Κωδικοποίηση UNFC, συμπεριλαμβανομένων των Κωδικών UNFC που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω επεξηγείται στην Ταξινόμηση του Διεθνούς Πλαισίου Ηνωμένων Εθνών για Αποθέματα/Πόρους – Στερεά Καύσιμα και Ορυκτά Υλικά. Επιτροπή Ηνωμένων Εθνών για την Ευρώπη, Επιτροπή για την Ανανεώσιμη Ενέργεια. ENERGY/WP.1/R.70, 17 Φεβρουάριος 1997.

Παράρτημα Β.2 – Γενικοί Όροι και Αντιστοιχίες

Σε όλο τον Κώδικα, συγκεκριμένες λέξεις χρησιμοποιούνται σε μια γενική έννοια ενώ μπορούν να λάβουν μια πολύ πιο συγκεκριμένη ερμηνεία από συγκεκριμένες ομάδες υλικών στη βιομηχανία. Για να αποφευχθεί η περιττή διπλή ερμηνεία, οι γενικοί όροι δίνονται παρακάτω μαζί με άλλου όρους που μπορεί να θεωρηθούν συνώνυμοι για τους σκοπούς αυτού του κειμένου.

Γενικός Όρος	**Συνώνυμα και παρόμοιοι όροι**	**Στοχευόμενο γενικευμένο νόημα**
Μεταλλευτική	Λατομική	Όλες οι δραστηριότητες που σχετίζονται με την εξόρυξη μετάλλων, ορυκτών και πολύτιμων λίθων από τη γη είτε επιφανειακά ή υπόγεια, και με οποιαδήποτε μέθοδο, (πχ. λατομεία, ανοιχτές και υπαίθριες εκμεταλλεύσεις, εξόρυξη διαλυμάτων, εξόρυξη πυθμένα ποταμών κλπ.)
Τονάζ	Ποσότητα, Όγκος	Μια έκφραση της ποσότητας υλικού που μας ενδιαφέρει ανεξάρτητα από μονάδες μέτρησης (οι οποίες θα πρέπει να αναφέρονται μαζί με τις τιμές).
Περιεκτικότητα	Ποιότητα, Ανάλυση (Τιμή)	Οποιαδήποτε μέτρησης των φυσικών χημικών χαρακτηριστικών του υλικού που μας ενδιαφέρει σε δείγματα ή προϊόν. Σημειώστε ότι ο όρος ποιότητα έχει ειδική σημασία για διαμάντια και άλλους πολύτιμους λίθους.
Μεταλλουργία	Επεξεργασία, Εμπλουτισμός, Προετοιμασία, Συγκέντρωση	Φυσικός και/ή χημικός διαχωρισμός των συστατικών που μας ενδιαφέρουν από μια μεγαλύτερη μάζα υλικού. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την προετοιμασία ενός τελικού εμπορεύσιμου προϊόντος από το εξορυγμένο υλικό. Στα παραδείγματα περιλαμβάνονται το κοσκίνισμα, η επίπλευση, ο μαγνητικός διαχωρισμός, η εκχείλιση, το πλύσιμο, η θέρμανση κλπ.
Απόληψη	Απόδοση	Το ποσοστό του ενδιαφέροντος υλικού που εξάγεται κατά τη διαδικασία εξόρυξης και/ή επεξεργασίας. Ένα μέτρο της αποτελεσμα-τικότητας της εξόρυξης ή της επεξεργασίας.
Μεταλλοφορία	Τύπος κοιτάσματος, σώμα μεταλλοφορίας, τύπος μεταλλοφορίας	Οποιοδήποτε μοναδικό ορυκτό ή συνδυασμός ορυκτών που εμφανίζεται σε μια μάζα, ή κοίτασμα, με οικονομικό ενδιαφέρον. Ο όρος στοχεύει στο να καλύψει όλες τις μορφές με τις οποίες εμφανίζεται η μεταλλοφορία, είτε μέσω της κλάσης του κοιτάσματος, την κατάσταση της εμφάνισης, την γέννηση ή την σύνθεση.
Ορυκτά Αποθέματα	Αποθέματα Μεταλλεύματος	Το ‘Ορυκτό’ προτιμάται υπό τον Κώδικα Αναφοράς αλλά και το ‘μετάλλευμα’ είναι σε συχνή χρήση και είναι γενικά αποδεκτό. Άλλες περιγραφές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το ξεκαθάρισμα του νοήματος πχ. αποθέματα γαιάνθρακα, αποθέματα διαμαντιών κλπ.

Ελάχιστο όριο εκμεταλλεύσιμης περιεκτικότητας	Προδιαγραφές προϊόντος	Η χαμηλότερη περιεκτικότητα, ή ποιότητα, μεταλλοφόρου υλικού που μπορεί να ληφθεί ως οικονομικά εξορύξιμο και διαθέσιμο σε ένα δοσμένο κοίτασμα. Μπορεί να ορίζεται στη βάση της οικονομικής αξιολόγησης, ή μέσω φυσικών ή χημικών ιδιοτήτων που ορίζουν μια αποδεκτή προδιαγραφή προϊόντος.
Διαμάντι	Πολύτιμοι λίθοι	Τα διαμάντια και άλλοι πολύτιμοι λίθοι με τα ίδια χαρακτηριστικά.

Παράρτημα Β.3 – Κανόνες Συμπεριφοράς και Οδηγίες

Οι παρακάτω Κανόνες Συμπεριφοράς ισχύουν για τα Αρμόδια Πρόσωπα που ασχολούνται με την πρακτική προετοιμασίας ή συνεισφοράς σε δημόσιες αναφορές που περιλαμβάνουν δηλώσεις Αποτελεσμάτων Μεταλλευτικής Έρευνας, Ορυκτών Πόρων ή Ορυκτών Αποθεμάτων. Οι Κανόνες αυτοί είναι συμπληρωματικοί των Επαγγελματικών Κωδικών και Κανόνων Ηθικής που μπορεί να ισχύουν λόγω της εγγραφής του Αρμόδιου Προσώπου σε ένα αναγνωρισμένο επαγγελματικό σωματείο. Οι Κανόνες Συμπεριφοράς δίνονται κάτω από διάφορες περιοχές υπευθυνότητας, και με έντονα γράμματα.

Κοινό και Κοινωνία

Τα Αρμόδια Πρόσωπα πρέπει να εκτελούν τα καθήκοντα τους με αφοσίωση προς το κοινό, και σε κάθε στιγμή της επαγγελματικής ή εργασιακής τους ιδιότητας να εκτελούν την εργασία τους με ακεραιότητα και επαγγελματική υπευθυνότητα. Ιδιαίτερα θα πρέπει:

- Να αναγνωρίζουν πάντα, ότι η υπευθυνότητα των Αρμόδιων Προσώπων προς το Κοινό ξεπερνά όλες τις άλλες ειδικές υπευθυνότητες συμπεριλαμβανομένων των επαγγελματικών, τομέα, ή ιδιωτικών ενδιαφερόντων ή προς άλλα Αρμόδια Πρόσωπα.
- Να βεβαιώνουν ότι τα σχόλια προς το κοινό σε γεωλογικά, μηχανολογικά και μεταλλουργικά και άλλα σχετικά θέματα γίνονται με προσοχή και ακρίβεια, χωρίς αβάσιμες, υπερβολικές, ή ανώριμες δηλώσεις. Θα πρέπει να γίνονται ξεκάθαρα και ολοκληρωμένα.
- Να βασίζουν τις Δημόσιες Αναφορές Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων σε ορθές και σχετικές τεχνικές εκτίμησης, επαρκώς επικυρωμένα δεδομένα και αμερόληπτη κρίση.
- Να προσέχουν ότι όταν τους απαιτείται, τα Αρμόδια Πρόσωπα θα πρέπει να δίνουν αποδείξεις, να εκφράζουν απόψεις ή να κάνουν δηλώσεις με αντικειμενικό και αληθινό τρόπο στη βάση επαρκούς γνώσης και κατανόησης.
- Να αναγνωρίζουν ότι όταν τους ζητείται, τα Αρμόδια Πρόσωπα θα πρέπει να είναι έτοιμα να αποκαλύπτουν λεπτομέρειες των προσόντων τους, των

επαγγελματικών σχέσεων τους και τις σχετικής εμπειρίας τους σε όλες τις δημόσιες αναφορές.

Επάγγελμα, Εργοδότες και Πελάτες

Τα Αρμόδια Πρόσωπα πρέπει να κρατούν ψηλά την τιμή, ακεραιότητα, φήμη και αξιοπρέπεια του επαγγέλματος τους και να διατηρούν το υψηλότερο επίπεδο συμπεριφοράς σε όλα τα επαγγελματικά θέματα. Ιδιαίτερα θα πρέπει:

- Να ενεργούν με τα απαραίτητα προσόντα, τη προσοχή και λεπτομέρεια σε κάθε περίπτωση όταν εκτελούν τις δραστηριότητες τους.
- Να εκτελούν εργασία μόνο στο πεδίο ικανότητας τους.
- Να μην παραπλανούν συνειδητά ή να εξαπατούν άλλους, να παραποιούν ή να κατασκευάζουν δεδομένα.
- Να σέβονται και να προστατεύουν εμπιστευτικές πληροφορίες.
- Να αναγνωρίζουν και να αποφεύγουν όπου είναι δυνατό πραγματικά και νοητά αντικρουόμενα συμφέροντα.
- Να ξεχωρίζουν μεταξύ γεγονότος και γνώμης ώστε να είναι προφανές το τι αποτελεί ερμηνεία γεγονότος και τι είναι επαγγελματική κρίση. Τα Αρμόδια / Εξουσιοδοτημένα Πρόσωπα μπορούν να δίνουν μια θεωρημένη επαγγελματική γνώμη βασισμένη στα γεγονότα, την εμπειρία, την ερμηνεία, την παρέκταση ή συνδυασμό αυτών.
- Να βεβαιώνουν ότι οι επιστημονικές και τεχνολογικές συνεισφορές είναι πλήρεις, ακριβείς και αμερόληπτες στο σχεδιασμό τους, την εφαρμογή και την παρουσίαση τους.
- Να βεβαιώνουν ότι στην τεκμηρίωση στην οποία βασίζονται οι δημόσιες αναφορές Ορυκτών Πόρων και Ορυκτών Αποθεμάτων, εφαρμόζονται ορθές και σχετικές τεχνικές εκτίμησης, επαρκώς επικυρωμένα δεδομένα και αμερόληπτη κρίση.
- Να ακολουθούν όλους τους νόμους και κανονισμούς που σχετίζονται με τη μεταλλευτική βιομηχανία και τους κανόνες, τις αρχές και πρακτικές που καθορίζονται και επιβάλλονται από τις σχετικές νομικές αρχές.
- Να χρησιμοποιούν τις καλύτερες δυνατότητες τους για να βεβαιώνουν ότι ο εργοδότης ή ο πελάτης τους ακολουθεί τους κανόνες, τις αρχές και τις πρακτικές των σχετικών νομικών αρχών.

Επαγγελματικά Σωματεία, Συνάδελφοι και Συνεργάτες

Τα Αρμόδια Πρόσωπα πρέπει σε όλες τις περιπτώσεις να ακολουθούν τους κανόνες των επαγγελματικών σωματείων στα οποία ανήκουν και να σέβονται και να αναγνωρίζουν τις συνεισφορές των συναδέλφων τους και άλλων εμπειρογνωμόνων στο να μπορούν να εκτελούν την εργασία τους. Θα πρέπει:

- Να αποδέχονται την ευθύνη για τα δικά τους λάθη.
- Να επιδεικνύουν θέληση να κριθούν από τους επαγγελματίες συναδέλφους τους.

- Να δέχονται να υπόκεινται στον πειθαρχικό κώδικα του επαγγελματικού σωματείου που ανήκουν.
- Να παροτρύνουν άλλους να αποδεχτούν τις ίδιες υπευθυνότητες, να γίνουν μέλη ενός αναγνωρισμένου επαγγελματικού σωματείου και να υπόκεινται από αυτούς τους Κανόνες Συμπεριφοράς.

Περιβάλλον, Υγιεινή και Ασφάλεια

Κατά την εκτέλεση της εργασίας τους, τα Αρμόδια Πρόσωπα πρέπει να μάχονται για την προστασία του φυσικού περιβάλλοντος και να βεβαιώνουν ότι οι συνέπειες της εργασίας του δεν επηρεάζουν αρνητικά την ασφάλεια, υγεία και ευημερία των ιδίων, των συναδέλφων τους και του Κοινού.

- Θα πρέπει να βεβαιώνουν ότι η εξέταση των παραγόντων μετατροπής που χρησιμοποιούνται στον καθορισμό των Ορυκτών Αποθεμάτων αναγνωρίζει πλήρως την ανάγκη για παροχή ενός ασφαλούς περιβάλλοντος εργασίας.
- Θα πρέπει να βεβαιώνουν ότι οι εκτιμήσεις Ορυκτών Αποθεμάτων αναγνωρίζουν τις πιθανές περιβαλλοντικές επιπτώσεις της ανάπτυξης και να βεβαιώνουν ότι γίνονται οι κατάλληλες προβλέψεις για ελάττωση των συνεπειών και αποκατάσταση.

Παράρτημα Γ – Πίνακας Εμβαδών Τυπικής Κανονικής Καμπύλης

Z	*A(Z)*	*Z*	*A(Z)*	*Z*	*A(Z)*	*Z*	*A(Z)*
0.00	0.00000	0.50	0.19146	1.00	0.34134	1.50	0.43319
0.01	0.00399	0.51	0.19497	1.01	0.34375	1.51	0.43448
0.02	0.00798	0.52	0.19847	1.02	0.34614	1.52	0.43574
0.03	0.01197	0.53	0.20194	1.03	0.34849	1.53	0.43699
0.04	0.01595	0.54	0.20540	1.04	0.35083	1.54	0.43822
0.05	0.01994	0.55	0.20884	1.05	0.35314	1.55	0.43943
0.06	0.02392	0.56	0.21226	1.06	0.35543	1.56	0.44062
0.07	0.02790	0.57	0.21566	1.07	0.35769	1.57	0.44179
0.08	0.03188	0.58	0.21904	1.08	0.35993	1.58	0.44295
0.09	0.03586	0.59	0.22240	1.09	0.36214	1.59	0.44408
0.10	0.03983	0.60	0.22575	1.10	0.36433	1.60	0.44520
0.11	0.04380	0.61	0.22907	1.11	0.36650	1.61	0.44630
0.12	0.04776	0.62	0.23237	1.12	0.36864	1.62	0.44738
0.13	0.05172	0.63	0.23565	1.13	0.37076	1.63	0.44845
0.14	0.05567	0.64	0.23891	1.14	0.37286	1.64	0.44950
0.15	0.05962	0.65	0.24215	1.15	0.37493	1.65	0.45053
0.16	0.06356	0.66	0.24537	1.16	0.37698	1.66	0.45154
0.17	0.06750	0.67	0.24857	1.17	0.37900	1.67	0.45254
0.18	0.07142	0.68	0.25175	1.18	0.38100	1.68	0.45352
0.19	0.07535	0.69	0.25490	1.19	0.38293	1.69	0.45449
0.20	0.07926	0.70	0.25804	1.20	0.38493	1.70	0.45543
0.21	0.08317	0.71	0.26115	1.21	0.38686	1.71	0.45637
0.22	0.08706	0.72	0.26424	1.22	0.38877	1.72	0.45728
0.23	0.09095	0.73	0.26730	1.23	0.39065	1.73	0.45818
0.24	0.09483	0.74	0.27035	1.24	0.39251	1.74	0.45907
0.25	0.09871	0.75	0.27337	1.25	0.39435	1.75	0.45994
0.26	0.10257	0.76	0.27637	1.26	0.39617	1.76	0.46080
0.27	0.10642	0.77	0.27935	1.27	0.39796	1.77	0.46164
0.28	0.11026	0.78	0.28230	1.28	0.39973	1.78	0.46246
0.29	0.11409	0.79	0.28524	1.29	0.40147	1.79	0.46327
0.30	0.11791	0.80	0.28814	1.30	0.40320	1.80	0.46407
0.31	0.12172	0.81	0.29103	1.31	0.40490	1.81	0.46485
0.32	0.12552	0.82	0.29389	1.32	0.40658	1.82	0.46562
0.33	0.12930	0.83	0.29673	1.33	0.40824	1.83	0.46638
0.34	0.13307	0.84	0.29955	1.34	0.40988	1.84	0.46712
0.35	0.13683	0.85	0.30234	1.35	0.41149	1.85	0.46784
0.36	0.14058	0.86	0.30511	1.36	0.41309	1.86	0.46856
0.37	0.14431	0.87	0.30785	1.37	0.41466	1.87	0.46926
0.38	0.14803	0.88	0.31057	1.38	0.41621	1.88	0.46995
0.39	0.15173	0.89	0.31327	1.39	0.41774	1.89	0.47062
0.40	0.15542	0.90	0.31594	1.40	0.41924	1.90	0.47128
0.41	0.15910	0.91	0.31859	1.41	0.42073	1.91	0.47193
0.42	0.16276	0.92	0.32121	1.42	0.42220	1.92	0.47257
0.43	0.16640	0.93	0.32381	1.43	0.42364	1.93	0.47320
0.44	0.17003	0.94	0.32639	1.44	0.42507	1.94	0.47381
0.45	0.17364	0.95	0.32894	1.45	0.42647	1.95	0.47441
0.46	0.17724	0.96	0.33147	1.46	0.42785	1.96	0.47500
0.47	0.18082	0.97	0.33398	1.47	0.42922	1.97	0.47558
0.48	0.18439	0.98	0.33646	1.48	0.43056	1.98	0.47615
0.49	0.18793	0.99	0.33891	1.49	0.43189	1.99	0.47670

Z	*A(Z)*	*Z*	*A(Z)*	*Z*	*A(Z)*	*Z*	*A(Z)*
2.00	0.47725	2.50	0.49379	3.00	0.49865	3.50	0.49977
2.01	0.47778	2.51	0.49396	3.01	0.49869	3.51	0.49978
2.02	0.47831	2.52	0.49413	3.02	0.49874	3.52	0.49978
2.03	0.47882	2.53	0.49430	3.03	0.49878	3.53	0.49979
2.04	0.47932	2.54	0.49446	3.04	0.49882	3.54	0.49980
2.05	0.47982	2.55	0.49461	3.05	0.49886	3.55	0.49981
2.06	0.48030	2.56	0.49477	3.06	0.49889	3.56	0.49981
2.07	0.48077	2.57	0.49492	3.07	0.49893	3.57	0.49982
2.08	0.48124	2.58	0.49506	3.08	0.49896	3.58	0.49983
2.09	0.48169	2.59	0.49520	3.09	0.49900	3.59	0.49983
2.10	0.48214	2.60	0.49534	3.10	0.49903	3.60	0.49984
2.11	0.48257	2.61	0.49547	3.11	0.49906	3.61	0.49985
2.12	0.48300	2.62	0.49560	3.12	0.49910	3.62	0.49985
2.13	0.48341	2.63	0.49573	3.13	0.49913	3.63	0.49986
2.14	0.48382	2.64	0.49585	3.14	0.49916	3.64	0.49986
2.15	0.48422	2.65	0.49598	3.15	0.49918	3.65	0.49987
2.16	0.48461	2.66	0.49609	3.16	0.49921	3.66	0.49987
2.17	0.48500	2.67	0.49621	3.17	0.49924	3.67	0.49988
2.18	0.48537	2.68	0.49632	3.18	0.49926	3.68	0.49988
2.19	0.48574	2.69	0.49643	3.19	0.49929	3.69	0.49989
2.20	0.48610	2.70	0.49653	3.20	0.49931	3.70	0.49989
2.21	0.48645	2.71	0.49664	3.21	0.49934	3.71	0.49990
2.22	0.48679	2.72	0.49674	3.22	0.49936	3.72	0.49990
2.23	0.48713	2.73	0.49683	3.23	0.49938	3.73	0.49990
2.24	0.48745	2.74	0.49693	3.24	0.49940	3.74	0.49991
2.25	0.48778	2.75	0.49702	3.25	0.49942	3.75	0.49991
2.26	0.48809	2.76	0.49711	3.26	0.49944	3.76	0.49992
2.27	0.48840	2.77	0.49720	3.27	0.49946	3.77	0.49992
2.28	0.48870	2.78	0.49728	3.28	0.49948	3.78	0.49992
2.29	0.48899	2.79	0.49736	3.29	0.49950	3.79	0.49992
2.30	0.48928	2.80	0.49744	3.30	0.49952	3.80	0.49993
2.31	0.48956	2.81	0.49752	3.31	0.49953	3.81	0.49993
2.32	0.48983	2.82	0.49760	3.32	0.49955	3.82	0.49993
2.33	0.49010	2.83	0.49767	3.33	0.49957	3.83	0.49994
2.34	0.49036	2.84	0.49774	3.34	0.49958	3.84	0.49994
2.35	0.49061	2.85	0.49781	3.35	0.49960	3.85	0.49994
2.36	0.49086	2.86	0.49788	3.36	0.49961	3.86	0.49994
2.37	0.49111	2.87	0.49795	3.37	0.49962	3.87	0.49995
2.38	0.49134	2.88	0.49801	3.38	0.49964	3.88	0.49995
2.39	0.49158	2.89	0.49807	3.39	0.49965	3.89	0.49995
2.40	0.49180	2.90	0.49813	3.40	0.49966	3.90	0.49995
2.41	0.49202	2.91	0.49819	3.41	0.49968	3.91	0.49995
2.42	0.49224	2.92	0.49825	3.42	0.49969	3.92	0.49996
2.43	0.49245	2.93	0.49831	3.43	0.49970	3.93	0.49996
2.44	0.49266	2.94	0.49836	3.44	0.49971	3.94	0.49996
2.45	0.49286	2.95	0.49841	3.45	0.49972	3.95	0.49996
2.46	0.49305	2.96	0.49846	3.46	0.49973	3.96	0.49996
2.47	0.49324	2.97	0.49851	3.47	0.49974	3.97	0.49996
2.48	0.49343	2.98	0.49856	3.48	0.49975	3.98	0.49997
2.49	0.49361	2.99	0.49861	3.49	0.49976	3.99	0.49997
						4.00	0.49997

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Armstrong, M., 1984. Common problems seen in variograms. *Mathematical Geology,* Vol. 16, No. 3, σελ. 305-313.

Armstrong, M., 1987. Coal mining geostatistics short course. Department of Mining and Metallurgical Engineering, University of Queensland (St. Lucia), 102 σελ.

Armstrong, M., (Ed.), 1989. Geostatistics Volumes 1 and 2 (Proc. of the 3rd. Int. Geostatistical Congress at Avignon). Kluwer Academic Publishers (Dordrecht).

Armstrong, M., και Jabin, R,, 1981. Variogram models must be positive-definite. *Mathematical Geology*, Vol. 13, No. 5, σελ. 455-459.

Armstrong, M., και Matheron, G., 1986. Disjunctive kriging revisited: part I. *Mathematical Geology,* Vol. 18, No. 8, σελ. 711-728.

Armstrong, M., και Matheron, G., 1986. Disjunctive kriging revisited: part II. *Mathematical Geology,* Vol. 18, No. 8, σελ. 729-741.

Barnes, R.J., 1991. Teacher's aide: the variogram sill and the sample variance. *Mathematical Geology,* Vol. 23, No. 4, σελ. 673-678.

Cathles, L.M., 1981. Fluid flow and genesis of hydrothermal ore deposits. *Economic Geology 7 5th Anniversary Volume,* σελ. 424-457.

Clark, W.A.V., και Hosking, P.L., 1986. Statistical methods for geographers. John Wiley & Sons (New York). 518 σελ.

Coleou,-T., 1989. Cut off grade optimisation: a panacea or a fools paradise? in: *Geostatistics Volume 2 (Proc. of the 3rd. Int. Geostatistical Congress atAvignon).* (Ed. M. Armstrong), Kluwer Academic Publishers (Dordrecht), σελ. 889-900.

Cressie, N. και Hawkins, D.M., 1980. Robust estimation of the variogram.Mathematical Geology, Vol. 12, No. 2, σελ. 115-125.

David, M., 1977. Geostatistical ore reserve estimation. Developments in Geomathematics 2. Elsevier (Amsterdam), 364 σελ.

David, M., 1988. Handbook of applied advanced geostatistical ore reserve estimation. Developments in Geomathematics 6. Elsevier (Amsterdam), 216 σελ.

Davis, J.C., 1986. Statistics and data analysis in geology (2nd Edition). John Wiley & Sons (New York). 646 σελ.

Delfiner, P., 1979. Basic introduction to geostatistics. Centre de Geostatistique (Fontainebleau) course CGMM-C78.

Diehl, P. και David, M., 1982. Classification of ore reserves/resources based on geostatistical methods. *CIM Bulletin*. Vol. 75, No. 838, σελ. 127-135.

Feller, W., 1968. An introduction to probability theory and its applications, Volume 1. (3rd Edition). John Wiley (New York), 509σελ.

Freund, J.E. και Walpole, R.E., 1980. Mathematical statistics (3rd Edition). Prentice Hall (New Jersey). 548 σελ.

Gomez, M. και Hazen, S., 1970. Evaluation of sulphur and ash distribution in coal seams by statistical response surface regression analysis. Report of Investigation 7377, US. Bureau of Mines (Washington), 120 σελ.

Guarascio, M., et al., 1975. Advanced geostatistics for the mining industry. (Proc. 'Geostat 75'Rome) NATO ASI Series C122. Reidel (Dordrecht).

Guarascio, M., Pizzul, C. και Bologna, F., 1989. Forecasting of selectivity, in: Geostatistics Volume 2 (Proc. of the 3rd. Int. Geostatistical Congress at Avignon). (Ed. M. Armstrong), Kluwer Academic Publishers (Dordrecht), σελ. 901-909.

Guibal, 1987. Recoverable reserves estimation at an Australian gold project, in: Matheron, G., and Armstrong, M., (Eds.), Geostatistical case studies. Reidel (Dordrecht), σελ. 149-168.

Guibal, D.G. 1990. Geostatistics for exploration and mining. Australian Mineral Foundation (Adelaide), 208 σελ.

Gy, P.M., 1979. Sampling of Particulate Materials Theory and Practice. *Developments in geomathematics 4.* Elsevier (Amsterdam), 431 σελ.

Hoel, P.G., 1972. Introduction to mathematical statistics (Fourth Edition). John Wiley and Sons (New York), 409 σελ.

Hohn, M.E., 1988. Geostatistics and petroleum geology. Van Nostrand Reinhold (New York), 264 σελ.

Ingamells, C.O., 1981. Evaluation of skewed exploration data—the nugget effect. Geochimica et Cosmochimica Acta. Vol. 45:1209-1216.

Institution of Mining and Metallurgy, 2001. Code for reporting of mineral exploration results, mineral resources and mineral reserves (the reporting code). Institution of Mining and Metallurgy, European Federation of Geologists, The Geological Society of London and the Institute of Geologists of Ireland, 34 σελ.

Isaaks, E.H., και Srivastava, R.M., 1989. An introduction to applied geostatistics. Oxford University Press (New York) 561 σελ.

Journel, A.G., 1983. Nonparametric estimation of spatial distributions. Mathematical Geology, Vol. 15, No. 3, σελ. 445-468.

Journel, A.G., 1987. Geostatistics for the environmental sciences. United States Environmental Protection Agency Report (Project CR 811893), U.S.E.P.A. (LasVegas), 135 σελ.

Journel, A.G., 1989. Fundamentals of geostatistics in five lessons. Short Course in Geology: Volume 8. American Geophysical Union (Washington), 40 σελ.

Journel, A.G., και Huijbregts, Ch.J., 1978. Mining geostatistics. Academic Press (London), 600 σελ.

Kim, Y.C., Myers, D.E., Knudsen, H.P., 1977. Advanced geostatistics in ore reserve estimation and mine planning (practitioner's guide). Department of Mining and Geological Engineering, University of Arizona (Tucson), 154 σελ.

Koch, G.S. και Link, R.F., 1971. Statistical analysis of geological data. Dover (New York), 813 σελ.

Kreyszig, E., 1983. Advanced engineering mathematics (Fifth Edition). John Wiley and Sons (New York), 988 σελ.

Lantuejoul, Ch., και Rivoirard, J., 1984. Une methode de determination d'anamorphose. Centre de Geostatistique, Ecole Des Mines De Paris (Fontainebleau) Report N-916, 45 σελ.

Leithold, L., 1986. The calculus with analytic geometry (5th Edition). Harper and Row (New York), 1329 σελ.

Lemmer, C., **1984.** Estimating local recoverable reserves via IK. In: Verley, G. *et al.* (Eds.), *Geostatistics for Natural Resource Characterization*, Reidal, Dordrecht, Holland, σελ. 349-364.

Mandel, J., 1984. The statistical analysis of experimental data (Second Edition). Dover Publications (New York), 410 σελ.

Marechal, A., 1978. Gaussian anamorphosis models. Fontainebleau SummerSchool Notes C-72, Centre de Morphologic Mathematique, (Fontainebleau), 22 σελ.

Matheron, G., 1981. La selectivitie des distributions. Centre de Geostatistique, Ecole Des Mines De Paris (Fontainebleau) Report N-686, 45 σελ.

Matheron, G., 1982. La destructuration des haute teneurs et Ie krigeage des indicatrices. Centre de Geostatistique, Ecole Des Mines De Paris (Fontainebleau) Report N-761, 33 σελ.

Matheron, G., 1984. Selectivity of the distributions and "the second principle of geostatistics" in: Verly, G., et al., (Eds.) Geostatistics for natural resources characterisation^ Reidel Publishing Co. (Dordrecht), σελ. 421- 433.

Matheron, G., και Armstrong, M., (Eds.), 1987. Geo statistical case studies. Reidel (Dordrecht), σελ. 149-168.

Mood, A.M., και Graybill, F.A., 1963. Introduction to the theory of Statistics (Second Edition). McGraw Hill-Kogakusha (New York/Tokyo), 443 σελ.

Nobble, A.C., 1992. Ore reserve/resource estimation. Mining Engineering Handbook, Vol. 2, Δεύτερη Έκδοση, SME-AIME (New York), σελ. 344-359.

Olea, R.A. (Ed.), 1991. Geostatistical glossary and multilingual dictionary. International Association for Mathematical Geology, Studies in Mathematical Geology Volume 3. Oxford University Press (New York), 177 σελ.

Pitard, F.F. 1990a. Pierre Gy's sampling theory and sampling practice. Volume 1. CRC Press (Florida).

Pitard, F.F. 1990b. Pierre Gy's sampling theory and sampling practice. Volume 2. CRC Press (Florida).

Ravenscroft, P.J., 1989. A comparison of selectivity in a number of South African gold mines, in: Geostatistics Volume 2 (Proc. of the 3rd Int. Geostatistical Congress at Avignon). (Ed. M. Armstrong), Kluwer Academic Publishers (Dordrecht), σελ. 911-922.

Rivoirard, J., 1987a. Computing variograms on uranium data. in: Matheron, G., and Armstrong, M., (Eds.), Geostatistical case studies. Reidel (Dordrecht), σελ. 1-22.

Rivoirard, J., 1987b. Geostatistics for skew distributions. South African Short Course Notes, C-131, Centre de Morphology Mathematique (Fontainebleau) 31 σελ.

Rivoirard, J., 1987c. Two key parameters when choosing the kriging neighborhood. Mathematical Geology, Volume 19, No. 8., σελ. 851-856.

Rivoirard, J., 1990. Introduction to disjunctive kriging and non-linear geostatistics. Centre de Morphology Mathematique (Fontainebleau) 90 σελ.

Royle, A.G., 1987. A workshop course in geostatistics. Department of Mining and Mineral Engineering, University of Leeds (Leeds).

Royle, A.G., 1992. A personal overview of geostatistics. In: Annels, A.E., (Eds.) *Case Histories and Methods in Mineral Resource Evaluation*, Geological Society Special Publication No. 63, σελ. 233-241.

Sans, BL, και Blaise, J.R-, 1987. Comparing estimated uranium grades with production figures, in: Matheron, G., and Armstrong, M., (Eds.), Geostatistical Case Studies. Reidel (Dordrecht), σελ. 169-185.

Sans, H., και Martin, V., 1984. Technical parametrisation of uranium reserves to be mined by open-pit method, in : Verly, G, et al. (Eds.) Geostatistics for natural resources characterisation.. Volume 2, Reidel Publishing Company (Dordrecht), σελ. 1071-1085.

Sichel, H.S., 1952. New methods in the statistical evaluation of mine sampling data. Trans. Inst. Mining Metallurgy, 61:261-288.

Sinclair, A.J., 1984. Univariate analysis, in: Howarth, R.J. (Ed.) Statistics and data analysis in geochemical prospecting. Handbook of Exploration Geochemistry, Vol. 2. Elsevier (Amsterdam), σελ. 59-81.

Sinclair, A.J., 1986. Statistical interpretation of soil geochemical data. Reviews in Economic Geology Volume 4, σελ. 97-115.

Thompson, M., 1984. Control procedures in geochemical analysis, in: Howarth, R.J. (Ed.) Statistics and data analysis in geochemical prospecting. Handbook of Exploration Geochemistry, Vol. 2. Elsevier (Amsterdam), σελ.40-58.

Thorn, C.E., 1988. An introduction to theoretical geomorphology. Unwin Hyman (Boston), 247 σελ.

Velleman, P.F., και Hoaglin, D.Q, 1981. Applications, basics and computing of exploratory data analysis. Duxbury Press (Boston), 354σελ.

Vann, J., **1997**. Applied mining geostatistics – Short course notes. GEOVAL (Perth), 244 σελ.

Verly, G.W., et al., 1984. Geostatistics for natural resources characterisation. NATO ASI Series C122. Reidel (Dordrecht).

Verly, G.W., και Sullivan, J., 1985. Multigaussian and probability krigings - application to the Jerrit Canyon deposit. Mining Engineering 3 7(6): 568-574.

Webster, R. και Oliver, M.A., 1990. Statistical methods in soil and land resource survey. Oxford University Press (New York), 316 σελ.